Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV©

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
www.formav.co/explorer

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

TECHNIQUES PHYSIQUES POUR L'INDUSTRIE ET LE LABORATOIRE

ÉPREUVE DE SCIENCES PHYSIQUES

SESSION 2013

_____

Durée : 4 heures
Coefficient : 4

_____

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau SCEREN

Matériel autorisé :

- Toutes les calculatrices de poche y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante (Circulaire n°99-186, 16/11/1999).

CE SUJET COMPORTE TROIS EXERCICES **INDÉPENDANTS** :

EXERCICE 1 : OPTIQUE ..... pages 2/15 à 6/15

EXERCICE 2 : ÉLECTRICITÉ ..... pages 7/15 à 11/15

EXERCICE 3 : MÉCANIQUE, THERMODYNAMIQUE ET CHIMIE ..... pages 12/15 à 13/15

Documents à rendre et à agrafer avec la copie :

- Document réponse n° 1 (exercice 1 optique) .....page 14/15
- Documents réponses n° 2 et 3 (exercice 2 électricité).....page 15/15

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.
Le sujet se compose de 15 pages, numérotées de 1/15 à 15/15.

EXERCICE 1 : OPTIQUE (durée conseillée 1 h 15)

ÉTUDE DU CONTRASTE DANS LE MONTAGE DES FENTES D'YOUNG.

Il s'agit d'étudier l'influence de la largeur de la fente source sur le contraste (facteur de visibilité) de la figure d'interférences obtenue avec des fentes d'Young.

On réalise le montage de la **figure 1** (**Annexe 1 - page 5**).
Le goniomètre est réglé à l'infini. Le collimateur est éclairé par une lampe à vapeur de mercure dont on a isolé la raie verte (λ = 546,1 nm) grâce à un filtre interférentiel. Les fentes d'Young sont disposées sur le plateau et on observe la figure d'interférences dans l'oculaire de la lunette.
Lorsque l'on augmente la largeur de la fente source, on observe une diminution du contraste, puis une annulation de celui-ci : la figure d'interférences est alors totalement brouillée. Si on augmente encore la largeur de la fente source, la figure d'interférences réapparait mais avec un contraste faible avant de disparaître à nouveau.

Les différentes parties sont indépendantes

PARTIE 1 : RÉGLAGE DU GONIOMÈTRE.

On utilise des modèles simplifiés pour le collimateur et la lunette.

1.1 - Étude du collimateur

Le collimateur est réglé à l'infini.

Compléter la **figure 2** du **document réponse n° 1** en plaçant les deux foyers principaux et en traçant la marche d'un faisceau lumineux issu de la fente source.

1.2 - Étude de la lunette

La lunette est réglée pour observer un objet à l'infini.

1.2.1 - Compléter la **figure 3** du **document réponse n° 1** en prolongeant la marche du faisceau lumineux.

1.2.2 - Où se forme l'image intermédiaire de l'objet à l'infini à travers l'objectif de la lunette ?

1.2.3 - Où se forme l'image définitive de l'objet à l'infini à travers la lunette ?

PARTIE 2 : ÉTUDE DE LA FIGURE D'INTERFÉRENCE.

2.1 - Fentes d'Young

Le montage est schématisé sur la **figure 4** du **document réponse n° 1 - page 14**.

Les fentes d'Young S_1 et S_2 sont éclairées par un faisceau lumineux émis par la fente source S, considérée comme infiniment fine et à égale distance de S_1 et S_2.

La lumière issue de S est monochromatique de longueur d'onde λ.

La distance entre les centres de S_1 et S_2 est notée e.

Le point M est repéré par la mesure algébrique $\overline{OM} = x$.

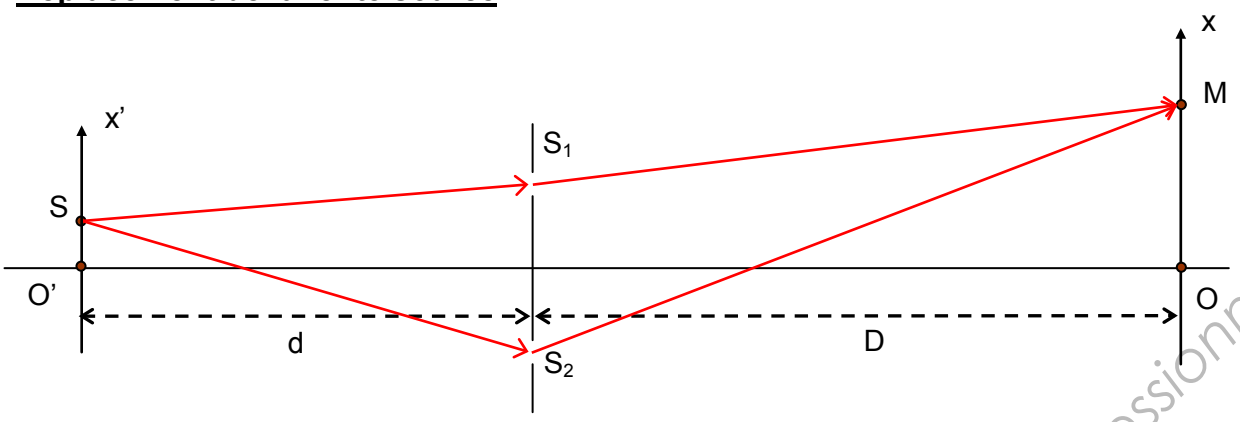
Les distances e et x sont très petites devant D.

2.1.1 - Établir l'expression de la différence de marche δ au point M. Si nécessaire, vous pouvez compléter le schéma de la **figure 4** du **document réponse n° 1**.

2.1.2 - Établir l'expression de l'interfrange i en fonction de λ, D et e.

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau SCEREN

2.2 - Déplacement de la fente source



La position de la source S est repérée par la mesure algébrique $\overline{O'S} = x'$.

L'expression de la différence de marche devient alors : $\delta' = \frac{ex}{D} + \frac{ex'}{d}$.

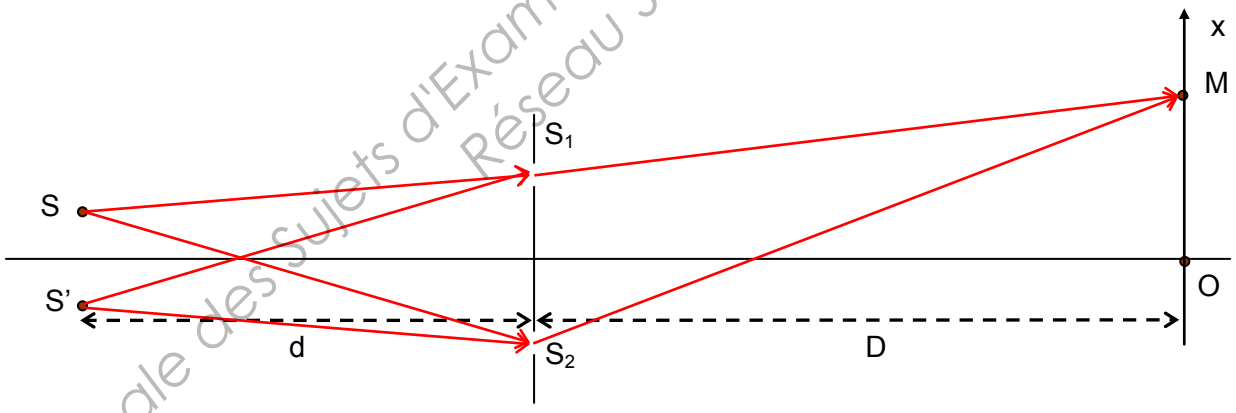
Montrer que l'interfrange i', après déplacement de la fente source, reste égal à i.

2.3 - Système à deux fentes

On remplace la fente source S par deux fentes sources S et S' infiniment fines, symétriques par rapport à l'axe optique, identiques mais incohérentes entre elles et distantes de s.

Au point M, la différence de marche pour les rayons issus de la source S s'écrit : $\delta'_1 = \frac{ex}{D} + \frac{es}{2d}$

Au point M, la différence de marche pour les rayons issus de la source S' s'écrit : $\delta'_2 = \frac{ex}{D} - \frac{es}{2d}$



Avec la seule source S, l'éclairement au point M s'écrit : $E'_1 = E_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{ex}{D} + \frac{es}{2d}\right)\right)\right]$.

Avec la seule source S', l'éclairement au point M s'écrit : $E'_2 = E_0\left[1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(\frac{ex}{D} - \frac{es}{2d}\right)\right)\right]$.

Si les deux sources S et S' éclairent simultanément, montrer que l'expression de l'éclairement au point M s'écrit : $E_t = 2E_0\left[1 + V.\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\frac{ex}{D}\right)\right]$ avec le contraste $V = \cos\left(\frac{\pi}{\lambda}\frac{es}{d}\right)$.

Donnée : $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$.

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau SCEREN

PARTIE 3 : ÉTUDE DU MONTAGE COMPLET.

Dans le montage complet de la **figure 1** en **annexe 1**, la fente source possède une largeur s. On fait varier s et on observe l'évolution du contraste de la figure d'interférences.

On observe un nouveau brouillage (contraste nul) lorsque la vis de réglage de la largeur de la fente micrométrique indique s = 230 μm.

Le collimateur est réglé pour donner une image de la fente à l'infini. La lunette est réglée à l'infini. Dans ce cas, l'expression de l'éclairement au niveau de la figure d'interférences est de la forme :

$$E = 2E_0\left[1 + V'.\cos\left(\frac{2\pi e x}{\lambda f'_{lunette}}\right)\right] \text{ où } V' = \frac{\sin\left(\frac{\pi e s}{\lambda f'_{coll}}\right)}{\frac{\pi e s}{\lambda f'_{coll}}} \text{ représente le contraste.}$$

Remarque : Cette expression est obtenue en considérant la source comme étant composée d'une infinité de sources fines, parallèles, incohérentes entre elles.

La fonction $\text{sinc}(U) = \frac{\sin U}{U}$ est tracée en **annexe 2**.

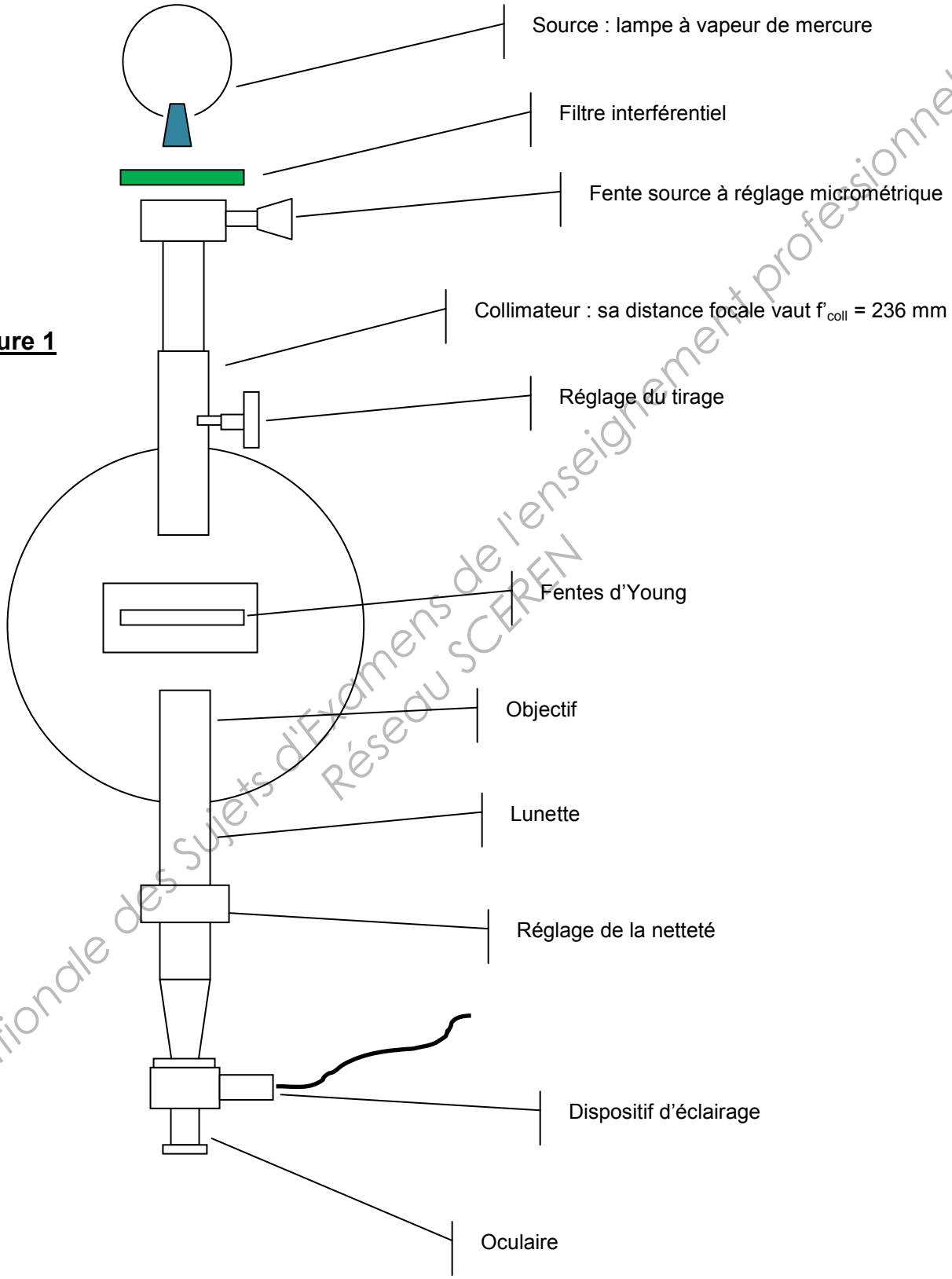
En déduire la valeur théorique s de la largeur de la fente lors de ce premier brouillage et la comparer avec la valeur mesurée.

Données : e = 556 μm, λ = 546,1 nm et f'_{coll} = 236 mm

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau SCEREN

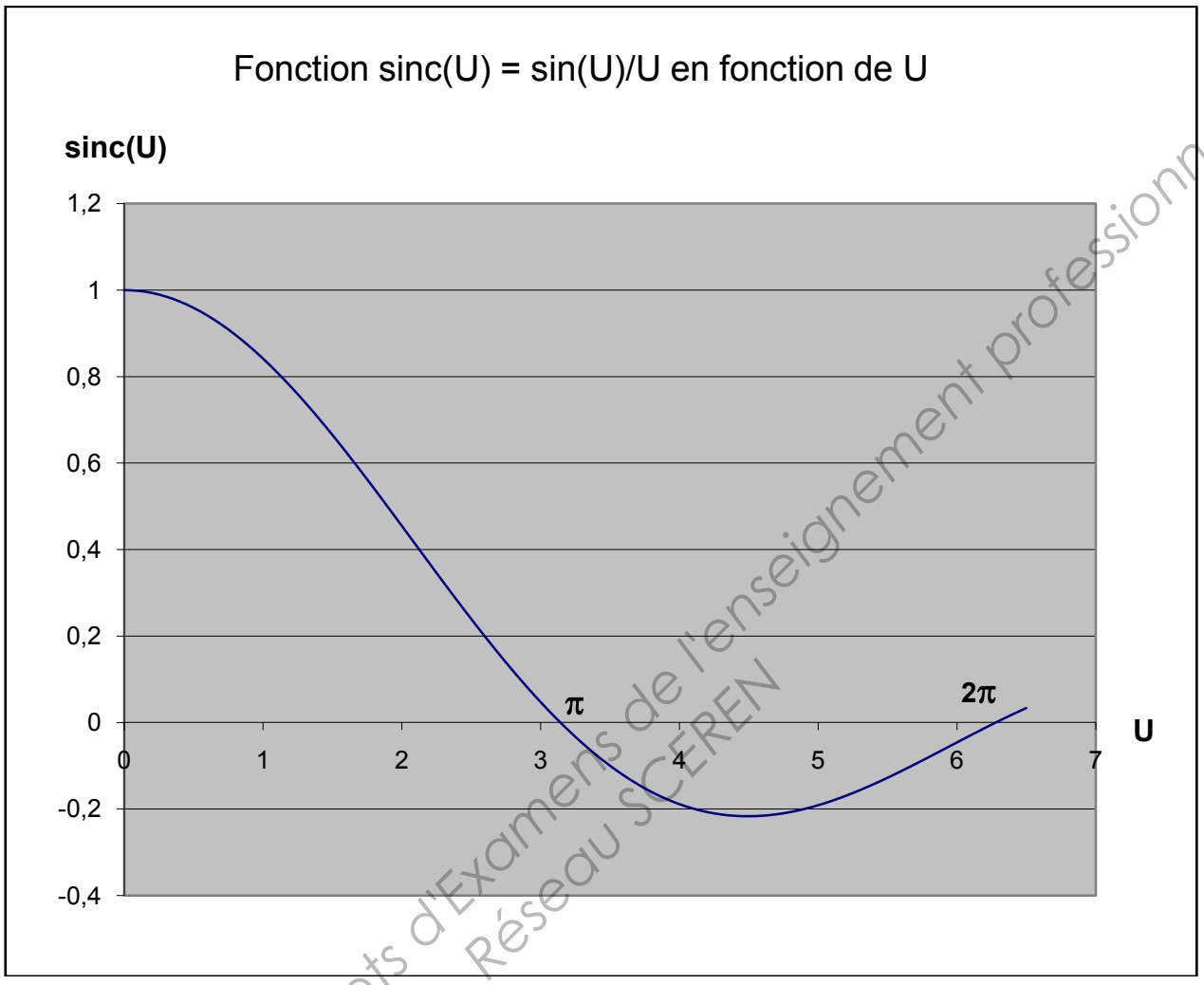
ANNEXE 1
PARTIE OPTIQUE

Figure 1



Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau SCEREN

ANNEXE 2
PARTIE OPTIQUE



Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau SCEREN

EXERCICE 2 : ÉLECTRICITÉ (durée conseillée 1 h 30)

FERROFLUIDES : PROPRIÉTÉS ET APPLICATIONS

PARTIE 1 : CAPTEUR D'INCLINAISON : L'INCLINOMÈTRE.

Un inclinomètre est un appareil qui a pour but de mesurer l'angle d'un système par rapport à l'horizontale.

L'inclinomètre à ferrofluide (suspension de particules magnétiques dans un liquide) est constitué d'un récipient cylindrique de rayon r à moitié rempli de ferrofluide.

Inclinomètre horizontal (vues de face et de coté).

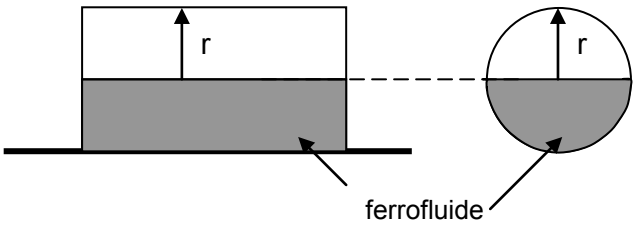


Figure 5

Inclinomètre incliné d'un angle $\theta < 0$ (angles comptés positivement dans le sens trigonométrique).

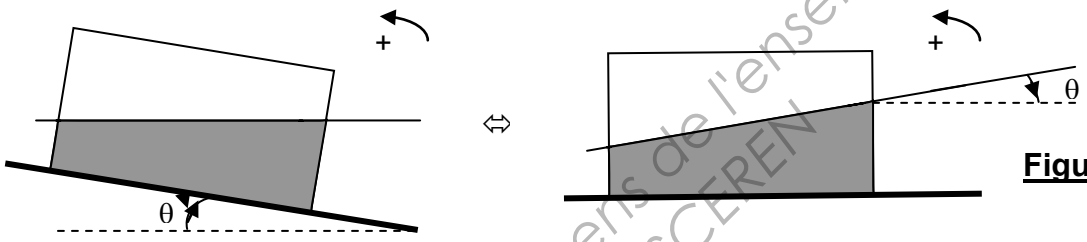


Figure 6

Sur ce cylindre on place 3 bobinages :

- Un bobinage (sur l'ensemble du cylindre et non représenté ci-dessous) alimenté par une source de courant sinusoïdal i de pulsation ω et d'expression $i(t) = I_0.\sin(\omega.t)$, crée un champ magnétique variable à l'intérieur du cylindre.
- Deux autres bobinages Bob1 et Bob2 situés à la distance $\frac{d}{2}$ de part et d'autre du plan de symétrie vertical du cylindre au niveau desquels nous allons recueillir deux forces électromotrices (f.e.m.) induites v_1 et v_2.

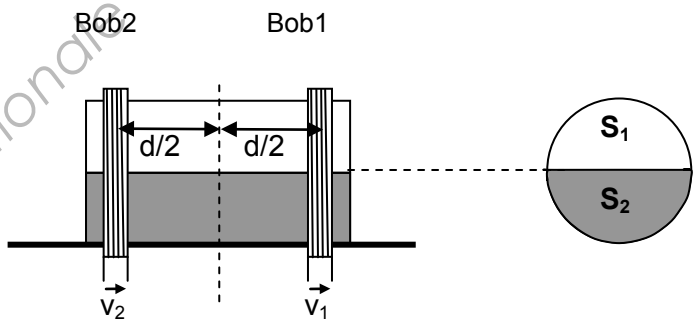


Figure 7

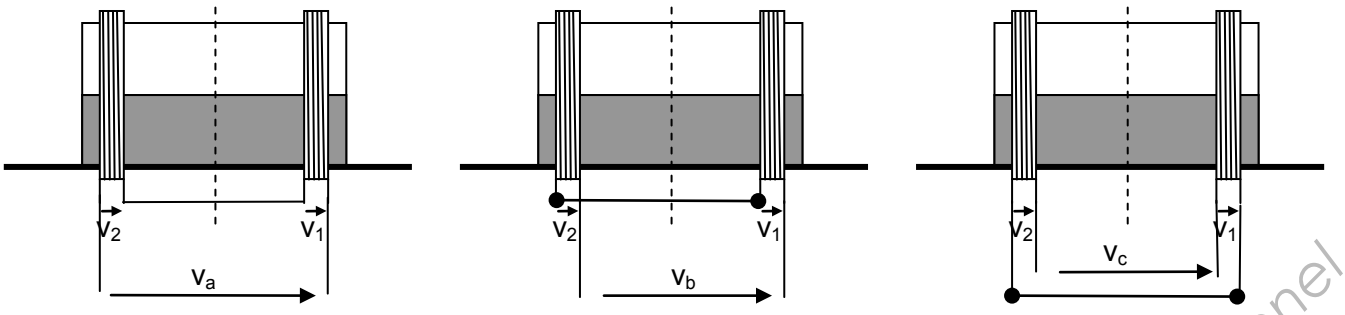
On désire réaliser simplement la soustraction des tensions v_1 et v_2 de façon à obtenir la tension $u = v_1 - v_2$.

1.1 - Exprimer successivement les tensions v_a, v_b et v_c (voir **figure 8**) en fonction de v_1 et v_2.

1.2 - En déduire le montage à choisir pour obtenir la tension u, u étant proportionnelle à l'angle d'inclinaison θ.

Base Nationale des sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau SCEREN

Figure 8



1.3 - On peut montrer que, lorsque l'angle θ est tel que $|\theta| < 0{,}5$ rad, la tension u est donnée par la relation : $u(t) = v_1(t) - v_2(t) = k.\omega.\theta.\cos(\omega.t)$ avec k une constante négative, θ l'angle d'inclinaison exprimé en radians et ω la pulsation du courant i.

u(t) est exprimé en volts, ω en radians par seconde.

Sachant que pour $\theta = 5{,}0°$ alors $u(t) = v_1(t) - v_2(t) = - 0{,}02.\cos(100.\pi.t)$, calculer la valeur de k en précisant son unité.

PARTIE 2 : DÉTERMINATION DE LA VALEUR ABSOLUE DE θ.

Pour déterminer la valeur absolue $|\theta|$, nous allons utiliser le montage dont le schéma fonctionnel est le suivant :

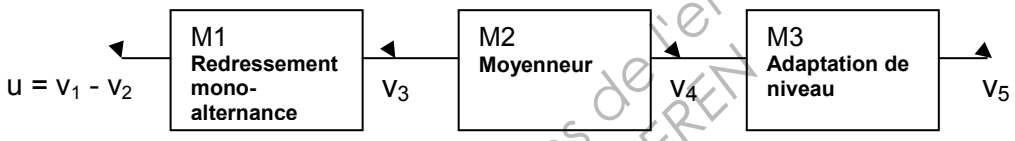


Figure 9

2.1 - REDRESSEMENT MONOALTERNANCE SANS SEUIL M1

Considérons le montage suivant :

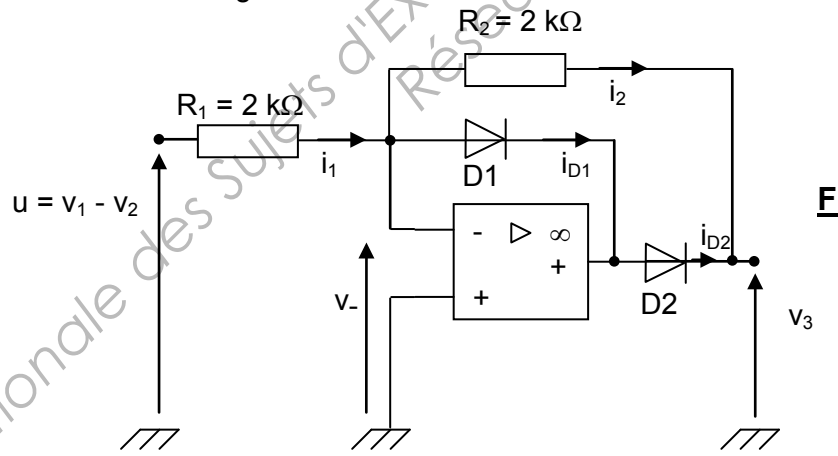


Figure 10

D1 et D2 sont deux diodes parfaites. L'amplificateur opérationnel (AOP) est parfait.

2.1.1 -

2.1.1.1 - Exprimer i_1 en fonction de i_{D1} et i_2.

2.1.1.2 - Exprimer i_2 en fonction de i_{D2}.

2.1.1.3 - En déduire i_1 en fonction de i_{D1} et i_{D2}.

2.1.1.4 - Exprimer $u = v_1 - v_2$ en fonction de R_1, i_1 et v_-

2.1.1.5 - Exprimer v_3 en fonction de R_2, i_2 et v_-

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau SCEREN

2.1.2 - Lorsque $u = v_1 - v_2 > 0$ alors D1 est passante et D2 bloquée. Dans ce cas :

2.1.2.1 - Justifier que l'AOP fonctionne en régime linéaire.

2.1.2.2 - Donner la valeur de la tension v_-

2.1.2.3 - Donner les valeurs des intensités i_{D2} et i_2.

2.1.2.4 - Déterminer la valeur de la tension v_3.

2.1.3 - Lorsque $u = v_1 - v_2 < 0$ alors D1 est bloquée et D2 passante. Dans ce cas :

2.1.3.1 - Justifier que l'AOP fonctionne en régime linéaire.

2.1.3.2 - Déterminer la valeur de la tension v_-

2.1.3.3 - Déterminer la valeur de l'intensité i_{D1}.

2.1.3.4 - Exprimer l'intensité i_1 en fonction de $u = v_1 - v_2$ et R_1.

2.1.3.5 - Exprimer l'intensité i_2 en fonction de v_3 et R_2.

2.1.3.6 - En déduire que $v_3 = -u = -(v_1 - v_2)$ dans le cas où $R_1 = R_2$.

2.1.4 - On donne à la **figure 11** l'allure en fonction du temps de la tension u pour θ = 5°.

En admettant que $v_3 = -u$ lorsque u est < 0 et que $v_3 = 0$ lorsque est $u > 0$, tracer sur le **document réponse 2** (à rendre avec la copie) l'allure en fonction du temps de la tension $v_3(t)$.

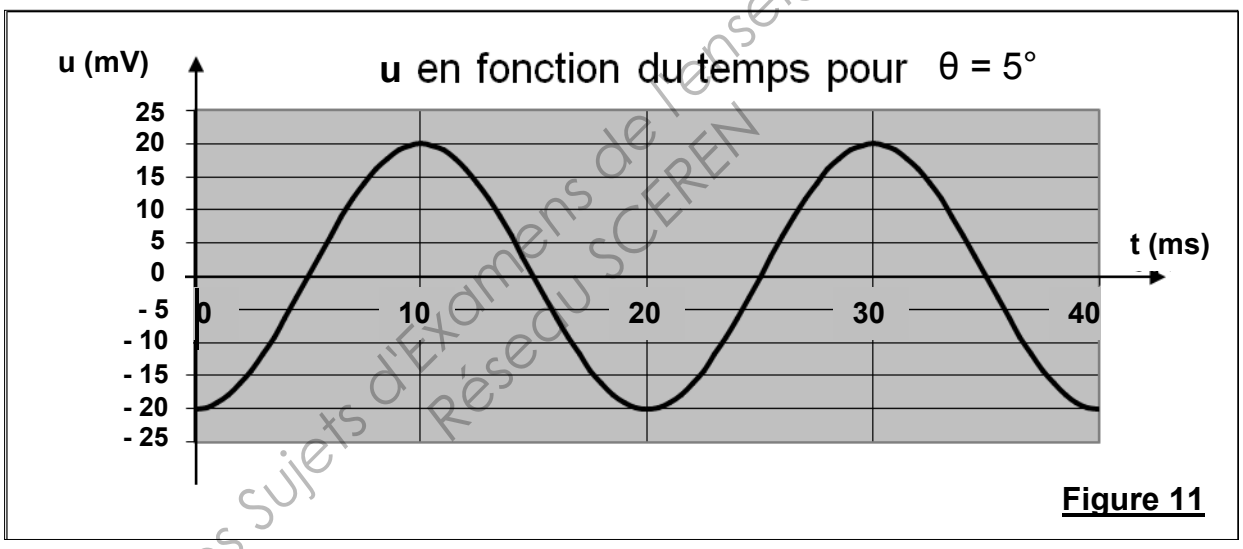


Figure 11

2.2 - <u>MONTAGE MOYENNEUR M2</u> : On désire déterminer la valeur moyenne de $v_3(t)$.

2.2.1 - On rappelle qu'une tension v(t), issue d'un montage redresseur monoalternance, dont l'allure en fonction du temps est représentée **figure 12**, a dans sa décomposition en série de Fourier les valeurs de fréquences et d'amplitudes indiquées dans le tableau suivant (nous n'avons indiqué que les termes d'indices n correspondants à des amplitudes ≥ 10 mV) :

Décomposition en série de Fourier de v(t)		
n	Fréquence (Hz)	Amplitude (mV)
0	0	318
1	20	500
2	40	212
4	80	44
6	120	18
8	160	10

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau SCEREN

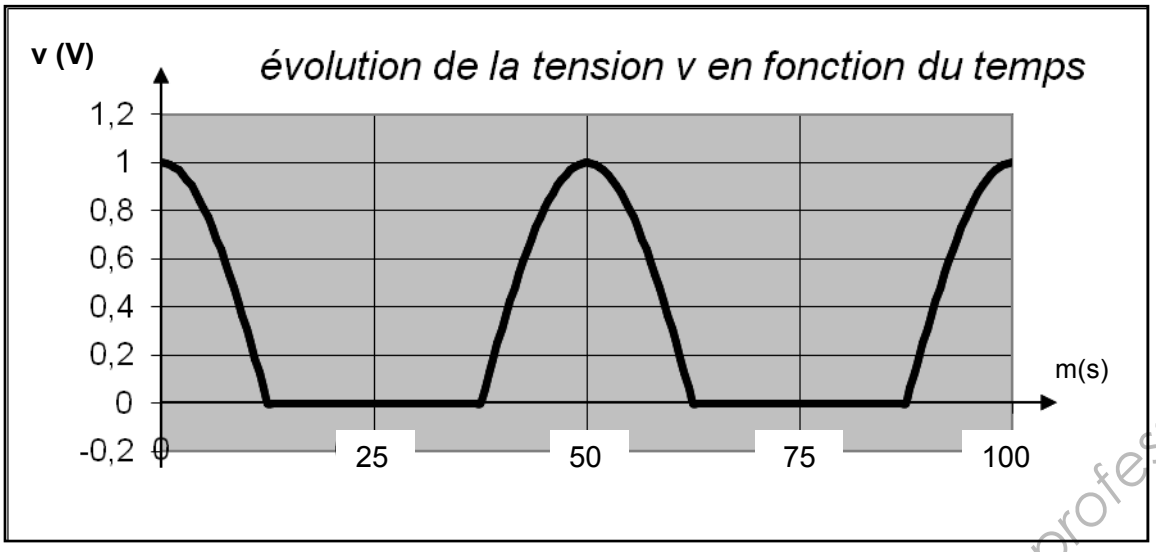


Figure 12

2.2.1.1 - Que vaut la fréquence f de la tension v(t) ?

2.2.1.2 - Que vaut la valeur moyenne V_{moy} de la tension v(t) ?

2.2.1.3 - Comment s'appelle le terme correspondant à n = 1 ?

2.2.1.4 - Comment s'appelle le terme correspondant à n = 4 ?

2.2.2 - Décomposition en série de Fourier de $v_3(t)$.

2.2.2.1 - Déterminer la valeur du rapport des valeurs maximales V_{3max} et V_{max} des tensions respectives $v_3(t)$ et v(t).

2.2.2.2 - En utilisant les résultats précédents, compléter le tableau de valeurs du **document réponse 3** correspondant à la décomposition en série de Fourier de la tension $v_3(t)$.

2.2.3 - Parmi les 3 montages proposés ci-dessous, lequel choisissez-vous pour déterminer la valeur moyenne de v(t) ? Justifier succinctement.

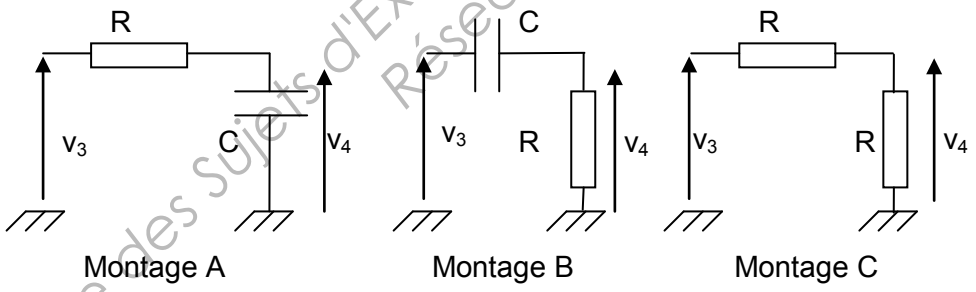


Figure 13

2.2.4 - Afin d'extraire la valeur moyenne et de faire l'adaptation de niveau à l'aide d'une seule opération, nous allons utiliser le montage suivant :

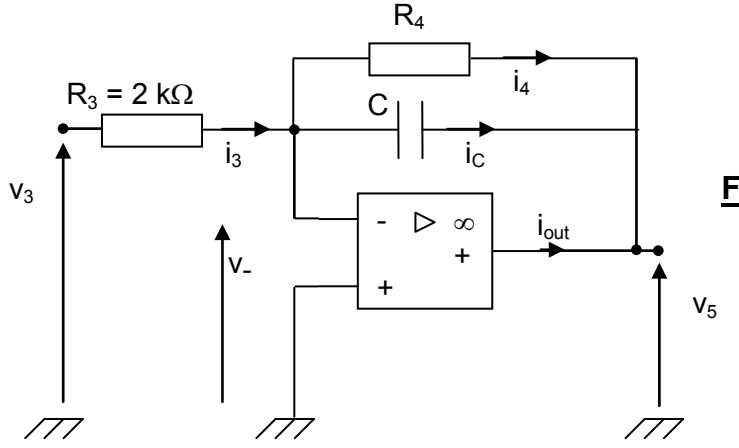


Figure 14

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau SCEREN

2.2.4.1 - Donner l'expression de l'impédance complexe $\underline{Z}$ d'un condensateur.

2.2.4.2 - En basse fréquence ($f \rightarrow 0$) un condensateur est-il équivalent à un circuit ouvert ou à un court-circuit ?

2.2.4.3 - En haute fréquence ($f \rightarrow \infty$) un condensateur est-il équivalent à un circuit ouvert ou à un court-circuit ?

2.2.4.4 - Dessiner le schéma équivalent du circuit de la **figure 14** en haute fréquence ($f \rightarrow \infty$).

2.2.4.5 - En déduire $\underline{T} = \frac{\underline{V_5}}{\underline{V_3}}$ en haute fréquence.

2.2.4.6 - Dessiner le schéma équivalent du circuit de la **figure 14** en basse fréquence ($f \rightarrow 0$).

2.2.4.7 - En déduire $\underline{T} = \frac{\underline{V_5}}{\underline{V_3}}$ en basse fréquence.

2.2.4.8 - Lorsque $|\theta| = 10°$ alors la valeur moyenne V_{3moy} de $v_3(t)$ est de 12,7 mV. Calculer R_4 de façon à avoir une tension de sortie V_5 égale à -100 mV.

2.2.4.9 - La fréquence de coupure de ce filtre passe-bas a pour expression $f_c = \frac{1}{2.\pi.R_4.C}$. Choisir C de façon à avoir un facteur 10 entre cette fréquence de coupure du filtre et la fréquence de v_3.

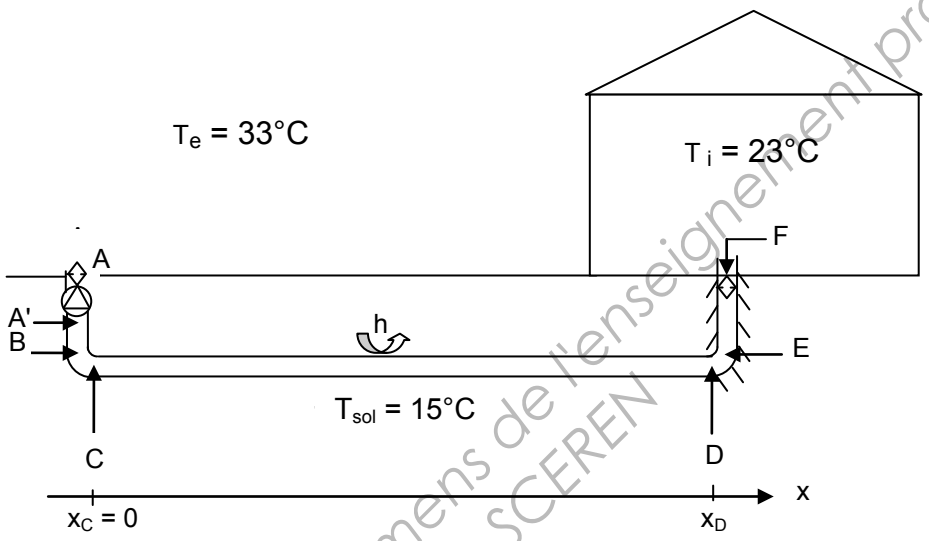
Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau SCEREN

EXERCICE 3 : MÉCANIQUE, THERMODYNAMIQUE ET CHIMIE (durée conseillée 1 h 15)

RAFRAÎCHISSEMENT D'UN LOCAL PAR MISE EN PLACE D'UN PUITS PROVENÇAL

Par une belle journée d'été où la température extérieure est T_e = 33°C, on souhaite maintenir la température intérieure d'un local à T_i = 23°C. Le principe d'un puits provençal consiste à utiliser l'énergie géothermique afin de rafraîchir l'air ventilé dans un bâtiment. De l'air prélevé à l'extérieur à la température T_e = 33°C est mis en circulation grâce à un ventilateur dans un tuyau enterré à deux mètres de profondeur où la température du sol est de 15°C. L'air ayant traversé le tuyau se trouve alors rafraîchi et prêt à refroidir le local.

Figure 15 : schéma du puits provençal



Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau SCEREN

Légende et valeurs numériques :

Ventilateur — grille filtrante

tuyau de PVC de diamètre constant d = 25 cm

tuyau calorifugé entre C et D, pas de transferts thermiques avec l'extérieur

Le puits provençal est constitué d'un ventilateur en A précédé d'une grille filtrante, suivi d'une canalisation verticale de 2,0 mètres de hauteur (portion AB), d'un coude BC, d'un tuyau horizontal CD d'une longueur x_D que l'on va déterminer, d'un coude DE identique au précédent et d'une portion verticale EF de 2,0 mètres de haut qui conduit l'air frais dans le local. Une grille filtrante est également située en F.

L'air circule dans le puits à vitesse constante u = 1,5 m.s^{-1} dans le tuyau de diamètre d = 25 cm.

h est le coefficient d'échange thermique par convection entre le tuyau et le sol h = 11 W.m^{-2}.K^{-1}.

Accélération de la pesanteur : g = 9,8 m.s^{-2}.

Données concernant l'air :

On considèrera que la masse volumique ρ de l'air est constante le long de l'écoulement et on prendra ρ = 1,2 kg.m^{-3} ;

Capacité thermique massique à pression constante c = 1,0.10^3 J.K^{-1}.kg^{-1}.

Dans la portion CD du tuyau, la température T de l'air en un point M d'abscisse x (voir **figure 15**) est une fonction décroissante de x, notée T(x). On préfère utiliser la fonction f(x) = T(x)-T_{sol} où T_{sol} est la température du sol à 2,0 mètres de profondeur, supposée constante et égale à 15°C et où f est de la forme : $f(x) = f_0.\exp\left(-\frac{4h}{\rho duc}x\right)$ où $f_0 = f(0)$.

1 -

1.1 - Entre A et C, on admet que la température décroît de 2,0 degrés, soit T(x = 0) = 31°C. Quelle est la valeur numérique de f_0 ?

1.2 - Quelle longueur x_D de tuyau est nécessaire pour que la température en D soit de 16°C ?

2 -

2.1 - Exprimer le débit volumique Q de l'air dans le tuyau en fonction de la vitesse u de l'air et du diamètre d de la canalisation. Calculer Q.

2.2 - Le local a été exposé pendant une heure à un flux de chaleur provenant de l'extérieur dont la valeur est Φ = 300 W. Quelle énergie calorifique E a donc reçue le local ?

2.3 - Afin de maintenir constante la température T_i du local, on fait fonctionner le puits pendant une durée Δt. La masse d'air frais entrante passe de 16°C à 23°C, cette variation de température sera notée $\Delta\theta$. Pendant cette durée Δt, on considère que la masse d'air frais absorbe totalement l'énergie E (question 2.2) reçue par le local. Exprimer la durée Δt en fonction de E, ρ, Q, c et $\Delta\theta$. Calculer Δt sachant que le débit volumique de l'air est Q = 265 $m^3.h^{-1}$.

3 - On admet que pour la longueur totale de la conduite :

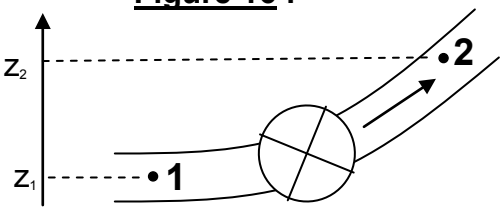
- les pertes de charge totales entre la sortie du ventilateur A' et l'entrée de l'air dans le local en F valent H_1 = 1,15 m ;
- les pertes de charge totales entre A et A' dues à la présence de la grille filtrante valent H_2 = 0,69 m.

On rappelle l'équation de Bernoulli exprimée en énergie massique entre deux points 1 et 2 :

$$\frac{P_1}{\rho} + gz_1 + \frac{u_1^2}{2} + e = \frac{P_2}{\rho} + gz_2 + \frac{u_2^2}{2} + gH$$

où z_1 et z_2 sont les altitudes respectives des points 1 et 2 ;
u_1 et u_2 sont les vitesses du fluide aux points 1 et 2 ;
P_1 et P_2 sont les pressions du fluide aux points 1 et 2 ;
e est l'énergie massique reçue par le fluide entre les points 1 et 2 ;
H est la perte de charge entre les points 1 et 2 exprimée en mètres.

Figure 16 :



3.1 - En appliquant la relation de Bernoulli entre A' et F, calculer la différence de pression entre A' et F quand l'air circule dans le tuyau, en tenant compte des pertes de charges. (Pour cela, on pourra considérer que $z_{A'} \approx z_F$).

3.2 - On considèrera que la vitesse de l'air à l'entrée du ventilateur en A est nulle, que $z_A \approx z_{A'}$ et que la pression de l'air est la même à l'entrée et à la sortie du puits. A partir de l'équation de Bernoulli, montrer que l'énergie e apportée par le ventilateur à un kilogramme de fluide s'écrit :

$$e = g(H_1 + H_2) + \frac{u^2}{2}$$

3.3 - Calculer la valeur numérique de e et en déduire la valeur de la puissance P apportée au fluide par le ventilateur, pour un débit volumique de l'air Q = 265 $m^3.h^{-1}$.

3.4 - Sachant que le ventilateur a un rendement de 12 %, calculer la puissance absorbée par ce ventilateur P_a.

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau SCEREN

DOCUMENT RÉPONSE N° 1
PARTIE OPTIQUE
À RENDRE AVEC LA COPIE

Figure 2 : modèle du collimateur

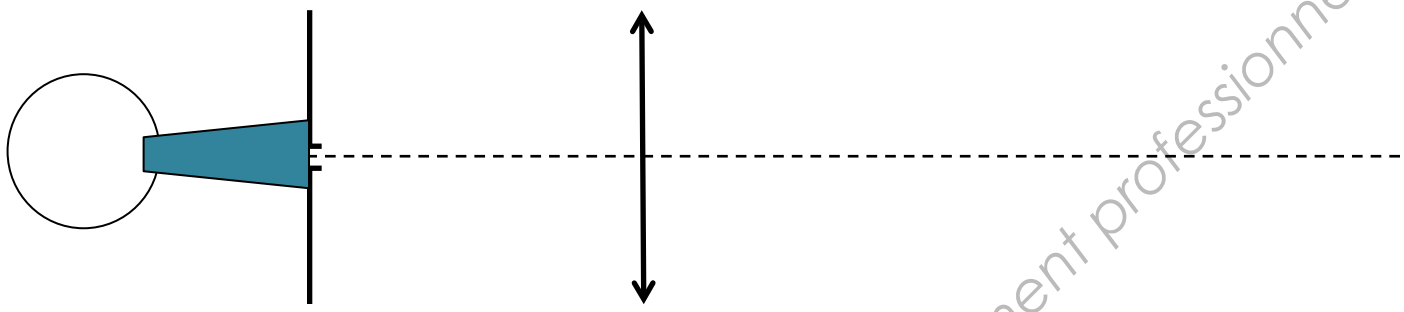


Figure 3 : modèle de la lunette

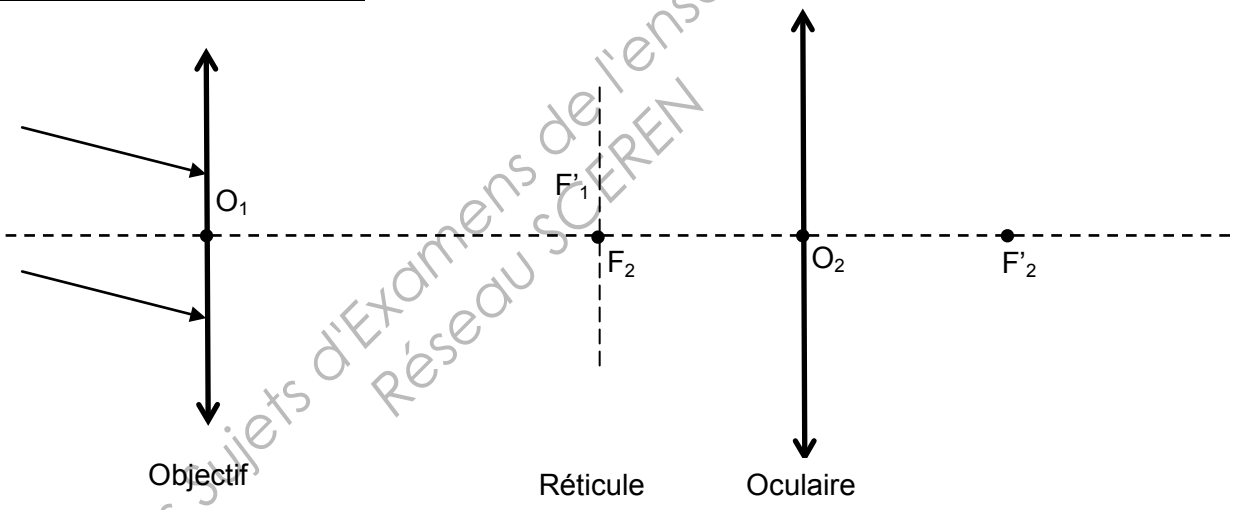
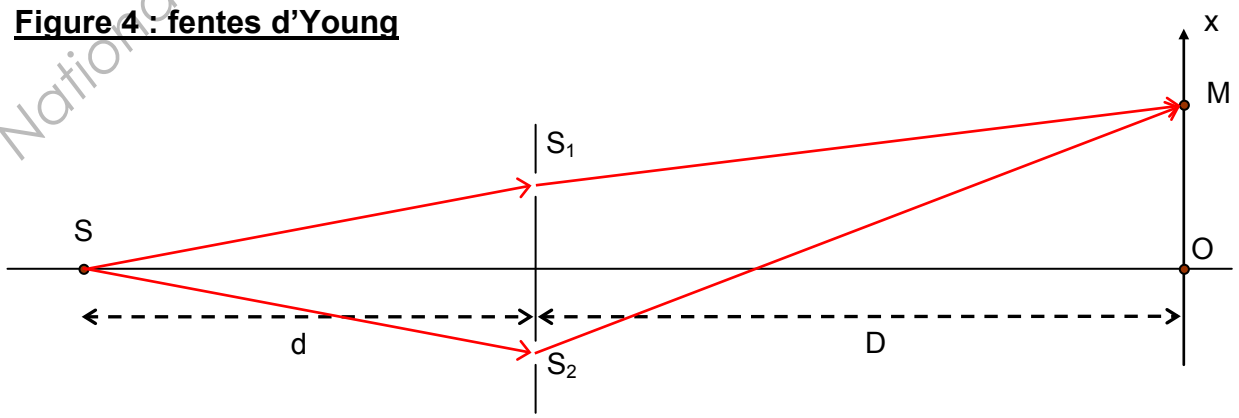


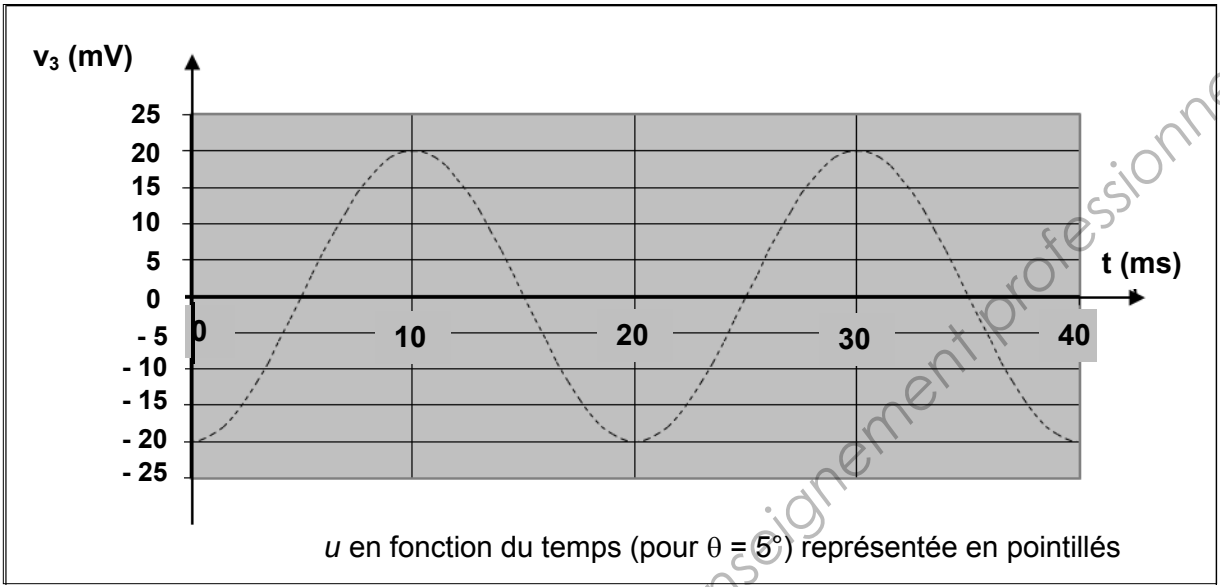
Figure 4 : fentes d'Young



Base Nationale des sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau SCEREN

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau SCEREN

DOCUMENT RÉPONSE N° 2
PARTIE ÉLECTRICITÉ
À RENDRE AVEC LA COPIE



u en fonction du temps (pour $\theta = 5°$) représentée en pointillés

DOCUMENT RÉPONSE N° 3
PARTIE ÉLECTRICITÉ
À RENDRE AVEC LA COPIE

Décomposition en série de Fourier de $v_3(t)$		
n	**Fréquence (Hz)**	**Amplitude (mV)**
0		
1		
2		
4		
6		
8		

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau CERTA

FORMULAIRE DE MATHEMATIQUES

GROUPEMENT A

CONTROLE INDUSTRIEL ET REGULATION AUTOMATIQUE

ELECTROTECHNIQUE

GENIE OPTIQUE

INFORMATIQUE ET RESEAUX POUR L'INDUSTRIE ET LES SERVICES TECHNIQUES

SYSTEMES ELECTRONIQUES

TECHNIQUES PHYSIQUES POUR L'INDUSTRIE ET LE LABORATOIRE

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau SCEREN

Plusieurs résultats figurant dans ce formulaire ne sont pas au programme de TOUTES les spécialités de BTS appartenant à ce groupement.

1. RELATIONS FONCTIONNELLES

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$, où $a > 0$ et $b > 0$

$\exp(a+b) = \exp a \times \exp b$

$a^t = e^{t \ln a}$, où $a > 0$

$t^\alpha = e^{\alpha \ln t}$, où $t > 0$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$

$\sin(2t) = 2\sin t \cos t$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

$e^{it} = \cos t + i \sin t$

$$\cos t = \frac{1}{2}\left(e^{it} + e^{-it}\right)$$

$$\sin t = \frac{1}{2i}\left(e^{it} - e^{-it}\right)$$

$e^{at} = e^{\alpha t}\left(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)\right)$, où $a = \alpha + i\beta$

2. CALCUL DIFFERENTIEL ET INTEGRAL

a) Limites usuelles

Comportement à l'infini

$\lim\limits_{t \to +\infty} \ln t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to +\infty} e^t = +\infty$;

$\lim\limits_{t \to -\infty} e^t = 0$;

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = +\infty$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} t^\alpha = 0$

Croissances comparées à l'infini

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t^\alpha} = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \frac{\ln t}{t^\alpha} = 0$

Comportement à l'origine

$\lim\limits_{t \to 0} \ln t = -\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = 0$; si $\alpha < 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha = +\infty$

Si $\alpha > 0$, $\lim\limits_{t \to 0} t^\alpha \ln t = 0$.

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau SCEREN

b) Dérivées et primitives

Fonctions usuelles

$f(t)$	$f'(t)$	$f(t)$	$f'(t)$
$\ln t$	$\dfrac{1}{t}$	$\operatorname{Arc}\sin t$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$
e^t	e^t	$\operatorname{Arc}\tan t$	$\dfrac{1}{1+t^2}$
t^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\alpha t^{\alpha-1}$	e^{at} $(a \in \mathbb{C})$	$a\mathrm{e}^{at}$
$\sin t$	$\cos t$		
$\cos t$	$-\sin t$		
$\tan t$	$\dfrac{1}{\cos^2 t} = 1+\tan^2 t$		

Opérations

$$(u+v)' = u'+v'$$
$$(ku)' = ku'$$
$$(uv)' = u'v+uv'$$
$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$(v\circ u)' = (v'\circ u)u'$$
$$\left(e^u\right)' = e^u u'$$
$$(\ln u)' = \frac{u'}{u},\ u \text{ à valeurs strictement positives}$$
$$\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$$

c) Calcul intégral

Valeur moyenne de f sur $[a\ ,\ b]$:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Intégration par parties :

$$\int_a^b u(t)\,v'(t)\,\mathrm{d}t = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)\,\mathrm{d}t$$

d) Développements limités

$$\mathrm{e}^t = 1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^n}{n!}+t^n\varepsilon(t)$$
$$\frac{1}{1+t} = 1-t+t^2+\cdots+(-1)^n t^n+t^n\varepsilon(t)$$
$$\ln(1+t) = t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{t^n}{n}+t^n\varepsilon(t)$$

$$\sin t = \frac{t}{1!}-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+\cdots+(-1)^p\frac{t^{2p+1}}{(2p+1)!}+t^{2p+1}\varepsilon(t)$$
$$\cos t = 1-\frac{t^2}{2!}+\frac{t^4}{4!}+\cdots+(-1)^p\frac{t^{2p}}{(2p)!}+t^{2p}\varepsilon(t)$$
$$(1+t)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}t+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}t^n+t^n\varepsilon(t)$$

e) Equations différentielles

Équations	Solutions sur un intervalle I
$a(t)x'+b(t)x=0$	$f(t) = k\mathrm{e}^{-G(t)}$ où G est une primitive de $t \mapsto \dfrac{b(t)}{a(t)}$
$ax''+bx'+cx=0$ équation caractéristique : $ar^2+br+c=0$ de discriminant Δ	Si $\Delta>0$, $f(t) = \lambda\mathrm{e}^{r_1 t}+\mu\mathrm{e}^{r_2 t}$ ..... où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique Si $\Delta=0$, $f(t) = (\lambda t+\mu)\mathrm{e}^{rt}$ ..... où r est la racine double de l'équation caractéristique Si $\Delta<0$, $f(t) = [\lambda\cos(\beta t)+\mu\sin(\beta t)]\mathrm{e}^{\alpha t}$ où $r_1 = \alpha+\mathrm{i}\beta$ et $r_2 = \alpha-\mathrm{i}\beta$ sont les racines complexes conjuguées de l'équation caractéristique.

Base nationale des sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau SCEREN

3. *SERIES DE FOURIER*

f : fonction périodique de période T ;

développement en série de Fourier :

$$s(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\omega t}, \quad (n \in \mathbb{N}^*,\ k \in \mathbb{Z}).$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\,dt \ ; \qquad a_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\cos(n\omega t)\,dt \ ; \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_a^{a+T} f(t)\sin(n\omega t)\,dt .$$

$$c_k = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)e^{-ik\omega t}\,dt \ (k \in \mathbb{Z}) ; \qquad c_0 = a_0 \ ; \qquad \frac{a_n - ib_n}{2} = c_n \ ; \qquad \frac{a_n + ib_n}{2} = c_{-n} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

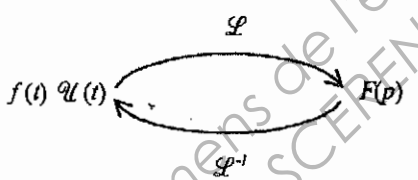
4. *TRANSFORMATION DE LAPLACE*

Fonctions usuelles

$$\mathcal{L}(\mathcal{U}(t)) = \frac{1}{p} \ ; \qquad \mathcal{L}(t\mathcal{U}(t)) = \frac{1}{p^2} \ ; \qquad \mathcal{L}\left(t^n \mathcal{U}(t)\right) = \frac{n!}{p^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N}) \ ;$$

$$\mathcal{L}\left(e^{-at}\mathcal{U}(t)\right) = \frac{1}{p+a} \ ; \ \mathcal{L}(\sin(\omega t)\mathcal{U}(t)) = \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \ ; \qquad \mathcal{L}(\cos(\omega t)\mathcal{U}(t)) = \frac{p}{p^2+\omega^2} .$$

Propriétés



$f(\alpha t)\,\mathcal{U}(t) \quad \alpha > 0$	$\frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$
$f(t-\tau)\,\mathcal{U}(t-\tau)$	$F(p)\,e^{-\tau p}$
$f(t)\,e^{-at}\,\mathcal{U}(t)$	$F(p+a)$
$f'(t)\mathcal{U}(t)$	$pF(p) - f(0^+)$
$f''(t)\mathcal{U}(t)$	$p^2F(p) - p\,f(0^+) - f'(0^+)$
$-t\,f(t)\,\mathcal{U}(t)$	$F'(p)$
$\int_0^t f(u)\,\mathcal{U}(u)\,du$	$\frac{F(p)}{p}$

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau SCEREN

5. *TRANSFORMATION EN Z*

Signal causal $n \mapsto x(n)$ pour $n \in \mathbb{N}$	**Transformée en Z** $z \mapsto (Zx)(z)$
$e(n)=1$	$(Ze)(z)=\dfrac{z}{z-1}$
$\begin{cases} d(0)=1 \\ d(n)=0 \text{ si } n\neq 0 \end{cases}$	$(Zd)(z)=1$
$r(n)=n$	$(Zr)(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2}$
$c(n)=n^2$	$(Zc)(z)=\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$f(n)=a^n,\ a\in\mathbb{R}-\{0\}$	$(Zf)(z)=\dfrac{z}{z-a}$
$y(n)=a^n x(n),\ a\in\mathbb{R}-\{0\}$	$(Zy)(z)=(Zx)\left(\dfrac{z}{a}\right)$
$y(n)=x(n-n_0),\ (n-n_0)\in\mathbb{N}$ ou $y(n)=x(n-n_0)e(n-n_0)$	$(Zy)(z)=z^{-n_0}(Zx)(z)$
$y(n)=x(n+1)$	$(Zy)(z)=z[(Zx)(z)-x(0)]$
$y(n)=x(n+2)$	$(Zy)(z)=z^2\left[(Zx)(z)-x(0)-x(1)z^{-1}\right]$
$y(n)=x(n+n_0),\ n_0\in\mathbb{N}^*$	$(Zy)(z)=z^{n_0}\left[(Zx)(z)-x(0)-x(1)z^{-1}-x(2)z^{-2}\cdots-x(n_0-1)z^{-(n_0-1)}\right]$

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau SCEREN

6. *PROBABILITES*

a) **Loi binomiale** $P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k}$ où $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}$; $E(X)=np$; $\sigma(X)=\sqrt{npq}$

b) **Loi de Poisson**

$$P(X=k)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

$$E(X)=\lambda$$

$$V(X)=\lambda$$

k \ λ	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488
1	0,1637	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293
2	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988
3	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198
4	0,0000	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030
5		0,0000	0,0001	0,0002	0,0004
6			0,0000	0,0000	0,0000

k \ λ	1	1.5	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0.368	0.223	0.135	0.050	0.018	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000
1	0.368	0.335	0.271	0.149	0.073	0.034	0.015	0.006	0.003	0.001	0.000
2	0.184	0.251	0.271	0.224	0.147	0.084	0.045	0.022	0.011	0.005	0.002
3	0.061	0.126	0.180	0.224	0.195	0.140	0.089	0.052	0.029	0.015	0.008
4	0.015	0.047	0.090	0.168	0.195	0.176	0.134	0.091	0.057	0.034	0.019
5	0.003	0.014	0.036	0.101	0.156	0.176	0.161	0.128	0.092	0.061	0.038
6	0.001	0.004	0.012	0.050	0.104	0.146	0.161	0.149	0.122	0.091	0.063
7	0.000	0.001	0.003	0.022	0.060	0.104	0.138	0.149	0.140	0.117	0.090
8		0.000	0.001	0.008	0.030	0.065	0.103	0.130	0.140	0.132	0.113
9			0.000	0.003	0.013	0.036	0.069	0.101	0.124	0.132	0.125
10				0.001	0.005	0.018	0.041	0.071	0.099	0.119	0.125
11				0.000	0.002	0.008	0.023	0.045	0.072	0.097	0.114
12					0.001	0.003	0.011	0.026	0.048	0.073	0.095
13					0.000	0.001	0.005	0.014	0.030	0.050	0.073
14						0.000	0.002	0.007	0.017	0.032	0.052
15							0.001	0.003	0.009	0.019	0.035
16							0.000	0.001	0.005	0.011	0.022
17								0.001	0.002	0.006	0.013
18								0,000	0.001	0.003	0.007
19									0.000	0.001	0.004
20										0.001	0.002
21										0,000	0.001
22											0.000

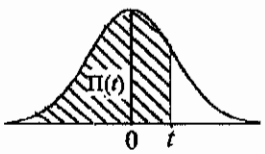
Base Nationale des sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau SCEREN

c) Loi normale

La loi normale centrée réduite est caractérisée par la densité de probabilité : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

EXTRAITS DE LA TABLE DE LA FONCTION INTEGRALE DE LA LOI NORMALE CENTREE, REDUITE $\mathcal{N}(0,1)$

$\Pi(t) = P(T \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500 0	0,504 0	0,508 0	0,512 0	0,516 0	0,519 9	0,523 9	0,527 9	0,531 9	0,535 9
0,1	0,539 8	0,543 8	0,547 8	0,551 7	0,555 7	0,559 6	0,563 6	0,567 5	0,571 4	0,575 3
0,2	0,579 3	0,583 2	0,587 1	0,591 0	0,594 8	0,598 7	0,602 6	0,606 4	0,610 3	0,614 1
0,3	0,617 9	0,621 7	0,625 5	0,629 3	0,633 1	0,636 8	0,640 6	0,644 3	0,648 0	0,651 7
0,4	0,655 4	0,659 1	0,662 8	0,666 4	0,670 0	0,673 6	0,677 2	0,680 8	0,684 4	0,687 9
0,5	0,691 5	0,695 0	0,698 5	0,701 9	0,705 4	0,708 8	0,712 3	0,715 7	0,719 0	0,722 4
0,6	0,725 7	0,729 0	0,732 4	0,735 7	0,738 9	0,742 2	0,745 4	0,748 6	0,751 7	0,754 9
0,7	0,758 0	0,761 1	0,764 2	0,767 3	0,770 4	0,773 4	0,776 4	0,779 4	0,782 3	0,785 2
0,8	0,788 1	0,791 0	0,793 9	0,796 7	0,799 5	0,802 3	0,805 1	0,807 8	0,810 6	0,813 3
0,9	0,815 9	0,818 6	0,821 2	0,823 8	0,825 4	0,828 9	0,831 5	0,834 0	0,836 5	0,838 9
1,0	0,841 3	0,843 8	0,846 1	0,848 5	0,850 8	0,853 1	0,855 4	0,857 7	0,859 9	0,862 1
1,1	0,864 3	0,866 5	0,868 6	0,870 8	0,872 9	0,874 9	0,877 0	0,879 0	0,881 0	0,883 0
1,2	0,884 9	0,886 9	0,888 8	0,890 7	0,892 5	0,894 4	0,896 2	0,898 0	0,899 7	0,901 5
1,3	0,903 2	0,904 9	0,906 6	0,908 2	0,909 9	0,911 5	0,913 1	0,914 7	0,916 2	0,917 7
1,4	0,919 2	0,920 7	0,922 2	0,923 6	0,925 1	0,926 5	0,927 9	0,929 2	0,930 6	0,931 9
1,5	0,933 2	0,934 5	0,935 7	0,937 0	0,938 2	0,939 4	0,940 6	0,941 8	0,942 9	0,944 1
1,6	0,945 2	0,946 3	0,947 4	0,948 4	0,949 5	0,950 5	0,951 5	0,952 5	0,953 5	0,954 5
1,7	0,955 4	0,956 4	0,957 3	0,958 2	0,959 1	0,959 9	0,960 8	0,961 6	0,962 5	0,963 3
1,8	0,964 1	0,964 9	0,965 6	0,966 4	0,967 1	0,967 8	0,968 6	0,969 3	0,969 9	0,970 6
1,9	0,971 3	0,971 9	0,972 6	0,973 2	0,973 8	0,974 4	0,975 0	0,975 6	0,976 1	0,976 7
2,0	0,977 2	0,977 9	0,978 3	0,978 8	0,979 3	0,979 8	0,980 3	0,980 8	0,981 2	0,981 7
2,1	0,982 1	0,982 6	0,983 0	0,983 4	0,983 8	0,984 2	0,984 6	0,985 0	0,985 4	0,985 7
2,2	0,986 1	0,986 4	0,986 8	0,987 1	0,987 5	0,987 8	0,988 1	0,988 4	0,988 7	0,989 0
2,3	0,989 3	0,989 6	0,989 8	0,990 1	0,990 4	0,990 6	0,990 9	0,991 1	0,991 3	0,991 6
2,4	0,991 8	0,992 0	0,992 2	0,992 5	0,992 7	0,992 9	0,993 1	0,993 2	0,993 4	0,993 6
2,5	0,993 8	0,994 0	0,994 1	0,994 3	0,994 5	0,994 6	0,994 8	0,994 9	0,995 1	0,995 2
2,6	0,995 3	0,995 5	0,995 6	0,995 7	0,995 9	0,996 0	0,996 1	0,996 2	0,996 3	0,996 4
2,7	0,996 5	0,996 6	0,996 7	0,996 8	0,996 9	0,997 0	0,997 1	0,997 2	0,997 3	0,997 4
2,8	0,997 4	0,997 5	0,997 6	0,997 7	0,997 7	0,997 8	0,997 9	0,997 9	0,998 0	0,998 1
2,9	0,998 1	0,998 2	0,998 2	0,998 3	0,998 4	0,998 4	0,998 5	0,998 5	0,998 6	0,998 6

TABLE POUR LES GRANDES VALEURS DE t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$

Base Nationale des Sujets d'Examens de l'enseignement professionnel
Réseau SCEREN