Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV©

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
www.formav.co/explorer

# BTS Mathématiques – Session 2024

## Groupement B – Code : 24MATGRB2

**Spécialité :** Conception et industrialisation en microtechniques

**Durée :** 2 heures

**Calculatrice :** Autorisée (mode examen actif ou « type collège »)

# EXERCICE 1 (10 points)

## Résumé de l'énoncé

On étudie la résistance $f(t)$ (en MPa) d'une dalle de béton en fonction du temps de séchage $t$ (en jours). On modélise cette résistance par une équation différentielle puis on analyse la fonction solution, son évolution, sa limite, et on traite un algorithme pour déterminer le nombre minimal de jours pour atteindre une certaine résistance.

## Partie A – Résolution d'une équation différentielle

### 1. Résolution de l'équation différentielle homogène

On cherche les solutions de $y' + 0{,}06y = 0$ sur $[0; +\infty[$.

La formule fournie donne, pour $y' + ay = 0$ : $y(t) = k\, e^{-a t}$, où $k$ est une constante réelle. Ici, $a = 0{,}06$.

$y(t) = k\, e^{-0{,}06 t}$ est la solution générale de l'équation homogène.

**Point de méthode :** On reconnaît une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants, homogène.
**Erreur fréquente :** Oublier le signe négatif dans l'exposant ou confondre la constante $a$ avec le coefficient de $y$.

### 2. Vérification qu'une fonction constante est solution

On pose $g(t) = 35$ pour tout $t$. Calculons $g'(t) + 0{,}06\, g(t)$ :

- $g'(t) = 0$
- $0{,}06\, g(t) = 0{,}06 \times 35 = 2{,}1$
- $g'(t) + 0{,}06\, g(t) = 0 + 2{,}1 = 2{,}1$

Donc $g$ est bien solution de l'équation différentielle (E).

La fonction $g(t) = 35$ est solution de $y' + 0{,}06y = 2{,}1$.

**Point de méthode :** Pour vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle, il suffit de remplacer dans l'équation.

### 3. Ensemble des solutions de l'équation différentielle complète

L'équation $y' + 0{,}06y = 2{,}1$ est linéaire du premier ordre non homogène. Les solutions sont de la forme :

- Solution générale de l'homogène : $k e^{-0,06 t}$
- Une solution particulière : $g(t) = 35$

Donc, toutes les solutions sont : $y(t) = k e^{-0,06 t} + 35$, où k est une constante réelle.

$y(t) = k e^{-0,06 t} + 35$, $k \in \mathbb{R}$ est l'ensemble des solutions de (E).

**Point de méthode :** La solution générale d'une équation différentielle linéaire non homogène = solution générale de l'homogène + une solution particulière.

### 4. Détermination de la solution particulière avec la condition initiale

On sait que $f(0) = 0$ (résistance initiale nulle). On cherche k tel que :

- $f(0) = k e^{0} + 35 = k + 35 = 0$
- D'où $k = -35$

Donc : $f(t) = -35 e^{-0,06 t} + 35$

$f(t) = -35 e^{-0,06 t} + 35$ pour $t \geq 0$.

**Erreur fréquente :** Oublier d'appliquer la condition initiale pour déterminer la constante k.

---

## Partie B – Étude de la fonction f

### 1. Calcul de la résistance après 7 jours et après 72 heures

- Après 7 jours : $f(7) = -35 e^{-0,06 \times 7} + 35$
- Calculons $-0,06 \times 7 = -0,42$
- $e^{-0,42} \approx 0,6570$
- $-35 \times 0,6570 \approx -22,0$
- $f(7) \approx -22,0 + 35 = 13,0$ (arrondi au dixième)

72 heures = 3 jours :

- $f(3) = -35 e^{-0,06 \times 3} + 35 = -35 e^{-0,18} + 35$
- $e^{-0,18} \approx 0,8360$
- $-35 \times 0,8360 \approx -29,3$
- $f(3) \approx -29,3 + 35 = 5,7$ (arrondi au dixième)

Après 7 jours : **13,0 MPa**.
Après 72 heures (3 jours) : **5,7 MPa**.

**Erreur fréquente :** Oublier de convertir 72 heures en jours (3 jours).

### 2. Vérification de la dérivée de f

On a $f(t) = -35 e^{-0,06 t} + 35$.

- La dérivée de $-35 e^{-0,06 t}$ est $-35 \times (-0,06) e^{-0,06 t} = 2,1 e^{-0,06 t}$
- La dérivée de 35 est 0.

Donc $f'(t) = 2,1\, e^{-0,06 t}$.

Pour tout $t \geq 0$, $f'(t) = 2,1\, e^{-0,06 t}$.

**Point de méthode :** Dérivation de l'exponentielle : $\frac{d}{dt}(e^{a t}) = a\, e^{a t}$.

### 3. Signe de la dérivée et sens de variation de $f$

- $e^{-0,06 t} > 0$ pour tout $t$
- $2,1 > 0$
- Donc $f'(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$

Donc, la fonction $f$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

$f'(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$ ; donc $f$ est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

**Erreur fréquente :** Croire que la fonction est décroissante à cause du signe négatif dans l'expression initiale.

### 4. Limite de $f(t)$ quand $t \to +\infty$ et interprétation

- Quand $t \to +\infty$, $e^{-0,06 t} \to 0$
- Donc $f(t) \to -35 \times 0 + 35 = 35$

Interprétation : la résistance du béton tend vers 35 MPa après un temps de séchage très long (résistance finale).

$\lim_{t\to+\infty} f(t) = 35$ : la résistance finale du béton est 35 MPa.

**Point de méthode :** La limite d'une exponentielle négative quand $t$ tend vers l'infini est 0.

### 5. Vérification de l'affirmation du fabricant

Le fabricant affirme : résistance à 28 jours = 80% de la résistance finale.

- Résistance finale : 35 MPa
- 80% de 35 = $0,8 \times 35 = 28$ MPa
- Calculons $f(28) = -35\, e^{-0,06 \times 28} + 35$
- $-0,06 \times 28 = -1,68$
- $e^{-1,68} \approx 0,186$
- $-35 \times 0,186 \approx -6,5$
- $f(28) \approx -6,5 + 35 = 28,5$ MPa (arrondi au dixième)

28,5 MPa est légèrement supérieur à 28 MPa (80% de 35).

L'affirmation du fabricant est **légèrement sous-évaluée** : la résistance après 28 jours est **28,5 MPa**, soit environ **81,4%** de la résistance finale.

**Erreur fréquente :** Arrondir trop tôt ou oublier de comparer à la valeur exacte (35 MPa).

### 6. Vérification que F est une primitive de f

On pose $F(t) = \frac{1750}{3} e^{-0,06 t} + 35 t$. Calculons $F'(t)$ :

- $\frac{d}{dt}\left(\frac{1750}{3} e^{-0,06 t}\right) = \frac{1750}{3} \times (-0,06) e^{-0,06 t} = -35 e^{-0,06 t}$
- $\frac{d}{dt}(35 t) = 35$
- Donc $F'(t) = -35 e^{-0,06 t} + 35 = f(t)$

F est bien une primitive de f sur [0; +∞[.

**Point de méthode :** Dérivation de l’exponentielle et de la fonction affine.

### 7. Valeur moyenne de la résistance sur les 28 premiers jours

Formule : $M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$ avec $a = 0$, $b = 28$.

- On a une primitive $F(t)$
- $\int_0^{28} f(t) dt = F(28) - F(0)$
- Donc $M = \frac{1}{28} (F(28) - F(0))$

Calculons :

- $F(0) = \frac{1750}{3} \times 1 + 0 = 583,33$
- $F(28) = \frac{1750}{3} \times e^{-0,06 \times 28} + 35 \times 28$
- $e^{-1,68} \approx 0,186$
- $\frac{1750}{3} \times 0,186 \approx 108,3$
- $35 \times 28 = 980$
- $F(28) \approx 108,3 + 980 = 1088,3$
- $F(28) - F(0) \approx 1088,3 - 583,3 = 505,0$
- $M \approx 505,0 / 28 \approx 18,0$ MPa (arrondi au dixième)

La valeur moyenne de la résistance sur 28 jours est **18,0 MPa**.

**Erreur fréquente :** Oublier de soustraire F(0) ou d’appliquer la formule de la valeur moyenne.

---

## Partie C – Algorithme

### 1. Compléter l’algorithme

On cherche N minimal tel que $f(N) \geq 21$.

- Ligne 3 : Tant que $R < 21$
- Ligne 4 : $t \leftarrow t + 1$

Ligne 3 : Tant que $R < 21$
Ligne 4 : $t \leftarrow t + 1$

**Erreur fréquente :** Oublier d’incrémenter t ou utiliser $R \leq 21$ au lieu de $R < 21$.

### 2. Détermination de N

On cherche le plus petit t tel que $f(t) \geq 21$.

- $f(t) = -35 e^{-0,06 t} + 35 \geq 21$
- $-35 e^{-0,06 t} \geq 21 - 35 = -14$
- $e^{-0,06 t} \leq 14 / 35 = 0,4$
- $-0,06 t \leq \ln(0,4)$
- $-0,06 t \leq -0,9163$
- $t \geq 0,9163 / 0,06 \approx 15,27$

Donc N = 16 (on prend le plus petit entier supérieur).

Le nombre minimal de jours est **N = 16**.

**Erreur fréquente :** Prendre la partie entière au lieu de l'entier supérieur.

---

# EXERCICE 2 (10 points)

## Résumé de l'énoncé

On étudie un circuit LC avec une entrée e(t) et une sortie s(t), modélisé par une équation différentielle. On utilise la transformée de Laplace pour résoudre, puis on interprète les résultats.

### 1. Réécriture de l'équation différentielle

On a L = 10 H, $C = 10^{-5}$ F. L'équation : $LC\, s''(t) + s(t) = e(t)$

- $LC = 10 \times 10^{-5} = 10^{-4}$
- Donc : $10^{-4} s''(t) + s(t) = e(t)$

L'équation différentielle devient : $10^{-4} s''(t) + s(t) = e(t)$

**Erreur fréquente :** Oublier de convertir les unités ou mal calculer le produit LC.

### 2. Passage à la transformée de Laplace

On applique la transformée de Laplace à chaque terme :

- $s''(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} p^2 S(p) - p\, s(0^+) - s'(0^+)$
- Conditions initiales : $s(0^+) = 0$, $s'(0^+) = 0$
- Donc $s''(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} p^2 S(p)$
- $s(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} S(p)$
- $e(t) \xrightarrow{\mathcal{L}} E(p)$

On obtient : $10^{-4} p^2 S(p) + S(p) = E(p)$

$(10^{-4} p^2 + 1) S(p) = E(p)$

**Point de méthode :** Utiliser les conditions initiales pour simplifier les termes.

### 3. Fonction de transfert $H(p)$

On a $S(p) = H(p) \times E(p)$.

- Donc $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{10^{-4} p^2 + 1}$
- On met au même dénominateur : $10^{-4} p^2 + 1 = \frac{p^2 + 10^4}{10^4}$
- Donc $H(p) = \frac{10^4}{p^2 + 10^4}$

$$H(p) = \frac{10^4}{p^2 + 10^4}$$

**Erreur fréquente :** Oublier de multiplier numérateur et dénominateur par $10^4$ pour simplifier.

### 4. Représentation graphique de $e(t) = 3 \mathcal{U}(t)$

$\mathcal{U}(t)$ est la fonction échelon unité :

- Pour $t < 0$, $e(t) = 0$
- Pour $t \geq 0$, $e(t) = 3$

On trace une droite horizontale à 0 pour $t < 0$, puis un saut à 3 pour $t \geq 0$.

**Point de méthode :** Savoir reconnaître et représenter une fonction échelon unité.

### 5. Expression de $E(p)$

On utilise le formulaire : $\mathcal{L}(\mathcal{U}(t)) = \frac{1}{p}$ Donc : $E(p) = 3 \times \frac{1}{p} = \frac{3}{p}$

$$E(p) = \frac{3}{p}$$

### 6. Calcul de $S(p)$ et simplification

On a : $S(p) = H(p) \times E(p) = \frac{10^4}{p^2 + 10^4} \times \frac{3}{p} = \frac{3 \times 10^4}{p (p^2 + 10^4)}$

On cherche à écrire $S(p)$ sous la forme : $\frac{3}{p} - \frac{3p}{p^2 + 10^4}$

On pose : $\frac{3 \times 10^4}{p (p^2 + 10^4)} = \frac{A}{p} + \frac{Bp + C}{p^2 + 10^4}$

On multiplie par $p (p^2 + 10^4)$ : $3 \times 10^4 = A(p^2 + 10^4) + (Bp + C)p$

Développons : $A p^2 + A \times 10^4 + B p^2 + C p$

Regroupons par puissances de $p$ : $(A + B) p^2 + C p + A \times 10^4$

On identifie avec $3 \times 10^4$ :

- Terme en $p^2$ : $A + B = 0 \Rightarrow B = -A$
- Terme en $p$ : $C = 0$
- Constante : $A \times 10^4 = 3 \times 10^4 \Rightarrow A = 3$
- Donc $B = -3$

On a donc : $S(p) = \frac{3}{p} + \frac{-3p}{p^2 + 10^4} = \frac{3}{p} - \frac{3p}{p^2 + 10^4}$

$$S(p) = \frac{3}{p} - \frac{3p}{p^2 + 10^4}$$

**Point de méthode :** Décomposition en éléments simples.

### 7. Expression de $s(t)$

On utilise le formulaire :

- $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p}\right) = \mathcal{U}(t)$
- $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p}{p^2 + \omega^2}\right) = \cos(\omega t) \mathcal{U}(t)$

Ici, $\omega^2 = 10^4 \Rightarrow \omega = 100$

Donc : $s(t) = 3 \mathcal{U}(t) - 3 \cos(100 t) \mathcal{U}(t) = 3 \mathcal{U}(t) (1 - \cos(100 t))$

$s(t) = 3 \mathcal{U}(t) (1 - \cos(100 t))$

**Erreur fréquente :** Oublier le facteur $\mathcal{U}(t)$ ou se tromper dans la racine de $10^4$.

### 8. Choix du croquis

La fonction $s(t)$ est nulle pour $t < 0$, puis oscille autour de 3 pour $t \geq 0$ (valeurs entre 0 et 6, car $1 - \cos(100 t)$ varie entre 0 et 2). Le croquis correct est celui qui commence à 0, puis présente des oscillations rapides entre 0 et 6.

Le croquis correct est **le croquis n°2**.

**Point de méthode :** Repérer l'allure d'une fonction du type $A (1 - \cos(\omega t))$.

---

## Formulaire récapitulatif

- $y' + a y = 0 \implies y(t) = k e^{-a t}$
- $y' + a y = b \implies y(t) = k e^{-a t} + \frac{b}{a}$
- $\frac{d}{dt}(e^{a t}) = a e^{a t}$
- $\lim_{t\to+\infty} e^{-a t} = 0$ si $a > 0$
- Valeur moyenne : $M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)\, dt$
- Transformée de Laplace :
  - $\mathcal{L}(\mathcal{U}(t)) = \frac{1}{p}$
  - $\mathcal{L}(t \mathcal{U}(t)) = \frac{1}{p^2}$
  - $\mathcal{L}(e^{-a t} \mathcal{U}(t)) = \frac{1}{p + a}$
  - $\mathcal{L}(\sin(\omega t) \mathcal{U}(t)) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
  - $\mathcal{L}(\cos(\omega t) \mathcal{U}(t)) = \frac{p}{p^2 + \omega^2}$
  - $\mathcal{L}(f'(t) \mathcal{U}(t)) = p F(p) - f(0^+)$
  - $\mathcal{L}(f''(t) \mathcal{U}(t)) = p^2 F(p) - p f(0^+) - f'(0^+)$

---

## Conseils généraux pour réussir l'épreuve de mathématiques en BTS

- **Lisez attentivement l'énoncé** : repérez les données, les unités, et les conditions initiales.
- **Soignez la rédaction** : détaillez chaque étape et justifiez vos calculs.
- **Vérifiez systématiquement vos résultats** : un résultat aberrant doit vous alerter.
- **Utilisez le formulaire à bon escient** : ne cherchez pas à tout retenir par cœur, mais sachez où trouver l'information.

- **Gérez votre temps** : ne vous attardez pas trop longtemps sur une question difficile, avancez et revenez-y si possible.

**© FormaV EI. Tous droits réservés.**

**Propriété exclusive de FormaV. Toute reproduction ou diffusion interdite sans autorisation.**

Copyright © 2026 FormaV. Tous droits réservés.

Ce document a été élaboré par FormaV© avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV©, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.
Dans une logique anti-plagiat, FormaV© se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.

Copyright © 2026 FormaV. Tous droits réservés.

Ce document a été élaboré par FormaV© avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV©, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV© se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.