Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2018 • Code sujet : **MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Variable selon la spécialité : 1, 1,5, 2, 2,5 ou 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation du départ d'un train à très haute vitesse (13 questions) **Page 3**

2. Probabilités et obsolescence programmée des smartphones (13 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 12**

Sujet officiel (PDF) : https://bts2m.fr/assets/annales/bts-2m/E2 - Mathématiques/2018/BTS 2M - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

1. Modélisation du départ d'un train à très haute vitesse

Un projet de train à propulsion électromagnétique vise à atteindre 400 km/h en moins de deux minutes. L'exercice étudie la distance parcourue et la vitesse du wagon, puis l'aire d'une pièce dessinée pour aménager une future gare.

A. Résolution d'une équation différentielle

Question 1°. Résoudre sur [0, +∞[l'équation différentielle homogène y' - 0,2y = 0 en utilisant la formule fournie.

On compare l'équation à la forme fournie $y' + ay = 0$. Ici, $a = -0,2$. La formule donne donc $y(t) = ke^{-at} = ke^{0,2t}$, où k est une constante réelle. Cette expression décrit toutes les solutions sur l'intervalle demandé $[0, +\infty[$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y(t) = ke^{0,2t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2°. Vérifier que la fonction g définie sur [0, 3] par g(t) = -15t - 75 est une solution de l'équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

> Pour vérifier que g est solution, on calcule sa dérivée puis on la remplace dans le membre de gauche de l'équation. On a $g'(t) = -15$, donc $g'(t) - 0,2g(t) = -15 - 0,2(-15t - 75) = -15 + 3t + 15 = 3t$. Le résultat est bien le membre de droite demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$g'(t) - 0,2g(t) = 3t$: g est bien une solution de (E).

Question 3°. Déduire de la question précédente l'ensemble des solutions de l'équation différentielle y' - 0,2y = 3t.

1. Une solution particulière de (E) est $g(t) = -15t - 75$, comme vérifié à la question précédente.
2. Les solutions de l'équation homogène associée sont $ke^{0,2t}$. En ajoutant cette solution générale à la solution particulière, on obtient toutes les solutions de (E), avec k réel.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 4°. Sachant que le wagon est au point de départ au temps t = 0, déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle qui vérifie la condition initiale f(0) = 0.

La solution générale trouvée est $y(t) = ke^{0,2t} - 15t - 75$. À l'instant initial, la condition impose $f(0) = 0$, donc $k - 75 = 0$ et $k = 75$. En reportant cette valeur dans l'expression générale, on obtient la fonction distance recherchée, qui vérifie bien la condition de départ.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 75e^{0,2t} - 15t - 75 = 75(e^{0,2t} - 1) - 15t$.

B. Étude de fonction et application

Question 1° a). À partir des expressions de f(t) et de f'(t) fournies par le logiciel, résoudre sur [0, 3] l'inéquation f'(t) ≥ 0.

Le logiciel donne $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$. Résoudre $f'(t) \geq 0$ revient à résoudre $e^{0,2t} \geq 1$. L'exponentielle étant strictement croissante et valant 1 lorsque son exposant est nul, cette inégalité équivaut à $0,2t \geq 0$, donc à $t \geq 0$. On restreint ensuite la solution à l'intervalle demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Sur $[0, 3]$, $f'(t) \geq 0$ partout, avec égalité uniquement en $t = 0$.

Question 1° b). Déduire de l'étude du signe de f' les variations de la fonction f sur [0, 3].

Le signe de la dérivée détermine le sens de variation de f. Elle est positive sur $[0, 3]$, sauf en $t = 0$ où elle s'annule. La fonction est donc croissante sur l'intervalle. Ses valeurs aux bornes sont $f(0) = 0$ et $f(3) = 75(e^{0,6} - 1) - 45$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f est croissante sur $[0, 3]$, de 0 à $75(e^{0,6} - 1) - 45$.

Question 2°. Déterminer la distance parcourue par le wagon au bout d'une minute, en kilomètres et au dixième près.

La distance parcourue après une minute est $f(1)$. En remplaçant t par 1 dans la formule, on obtient $f(1) = 75(e^{0,2} - 1) - 15$. Cette valeur est environ $1,6052$ km. L'arrondi au dixième consiste à conserver un chiffre après la virgule, en tenant compte du chiffre suivant.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Après une minute, la distance parcourue est $1,6$ km, au dixième près.

Question 3° a). Sachant que la vitesse instantanée du wagon, en kilomètres par minute, est donnée par f'(t), déterminer sa vitesse à t = 2 minutes et arrondir au dixième.

1. La vitesse instantanée est donnée par $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$, en kilomètres par minute.

2. À deux minutes, $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1) \approx 7,37737$. En arrondissant au dixième, on obtient la vitesse demandée. L'unité reste le kilomètre par minute, comme précisé dans l'énoncé.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> À $t = 2$ minutes, la vitesse est $7,4$ km/min au dixième près.

Question 3° b). Dire si l'objectif des ingénieurs est atteint et justifier la réponse au regard de la vitesse et du délai fixés.

La vitesse augmente avec le temps, car $f'(t) = 15e^{0,2t} - 15$ est croissante. À deux minutes, elle vaut environ $7,377$ km/min, soit $7,377 \times 60 \approx 442,642$ km/h. Elle dépasse donc déjà 400 km/h à cet instant. Comme elle augmente continûment depuis zéro, le seuil est franchi avant deux minutes.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui : le seuil de 400 km/h est atteint avant deux minutes.

Question 4°. Choisir, parmi les trois propositions, une équation de la tangente à la courbe C au point d'abscisse 2. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée. La formule de tangente est fournie.

La formule de tangente en $t = 2$ est $y = f'(2)(t - 2) + f(2)$. Avec $f'(2) = 15(e^{0,4} - 1)$ et $f(2) = 75(e^{0,4} - 1) - 30$, la constante se simplifie en $45e^{0,4} - 75$. Cela correspond à la troisième proposition du sujet.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La troisième proposition : $y = 15(e^{0,4} - 1)t + 45e^{0,4} - 75$.

C. Calcul intégral

Question 1°. Choisir, parmi les propositions, l'aire A1 du rectangle OPQR en unités d'aire. Une seule réponse est exacte et aucune justification n'est demandée.

Dimension du rectangle OPQR	Valeur
Largeur, de $x = 0$ à $x = 3$	3
Hauteur, donnée par le bord supérieur	2,25
Aire	$3 \times 2,25$

Le rectangle a donc une aire de 6,75 unités d'aire. Parmi les trois réponses proposées, il faut choisir celle qui indique cette valeur.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A_1 = 6,75$ u. a.

Question 2°. À l'aide de la primitive fournie, calculer l'aire A2 de la partie du plan limitée par la courbe représentative de g, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 3.

Sur $[0,3]$, $g(x) = \frac{27x}{2x^2+18}$ est positive, donc l'aire cherchée est son intégrale. En utilisant la primitive fournie, on calcule $A_2 = \left[\frac{27}{4}\ln(x^2+9)\right]_0^3$. Ainsi, $A_2 = \frac{27}{4}(\ln 18 - \ln 9) = \frac{27}{4}\ln 2$, soit environ 4,679 unités d'aire.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A_2 = \frac{27}{4}\ln 2 \approx 4,679$ u. a.

Question 3°. Déduire des questions précédentes l'aire hachurée A, en unités d'aire, et arrondir au millième.

1. Dans la moitié droite, l'aire hachurée est le rectangle moins l'aire sous la courbe : $A_1 - A_2$.
2. Par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, l'aire totale vaut $A = 2(A_1 - A_2) = 2\left(6,75 - \frac{27}{4}\ln 2\right)$. Son arrondi au millième donne le résultat demandé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$A \approx 4,143$ u. a., au millième près.

2. Probabilités et obsolescence programmée des smartphones

L'exercice étudie deux formes d'obsolescence dans une population de smartphones, puis la réparabilité d'un lot de modèles A. Il se termine par un test bilatéral vérifiant la proportion de personnes qui pensent que la marque B pratique l'obsolescence programmée.

A. Probabilités conditionnelles

Question 1°. À partir des données sur les obsolescences technique et logicielle dans une population de 200 smartphones, recopier et compléter le tableau d'effectifs croisant les smartphones touchés ou non par chaque type d'obsolescence.

Les 3 % d'obsolescence technique représentent $0{,}03 \times 200 = 6$ smartphones, et les 8 % d'obsolescence logicielle en représentent $0{,}08 \times 200 = 16$. Parmi les 16 touchés par l'obsolescence logicielle, $12{,}5\%$ sont aussi touchés techniquement, soit $0{,}125 \times 16 = 2$. Les autres effectifs se déduisent des totaux des lignes et des colonnes.

Smartphones	Touchés par l'obsolescence logicielle	Non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
Touchés par l'obsolescence technique	2	4	6
Non touchés par l'obsolescence technique	14	180	194
Total	16	184	200

Tableau d'effectifs complété

Smartphones	touchés par l'obsolescence logicielle	non touchés par l'obsolescence logicielle	Total
touchés par l'obsolescence technique	2	4	6
non touchés par l'obsolescence technique	14	180	194
Total	16	184	200

✓ RÉPONSE À RETENIR

Effectifs croisés : 2, 4, 14 et 180. Totaux : 6 et 194 par ligne, 16 et 184 par colonne, sur 200 smartphones.

Question 2°. Pour un smartphone choisi au hasard parmi les 200, donner les probabilités P(T), P(L) et P_L(T), où T désigne l'obsolescence technique et L l'obsolescence logicielle.

Une probabilité simple est l'effectif de l'événement divisé par l'effectif total. On obtient donc $P(T) = 6/200 = 0{,}03$ et $P(L) = 16/200 = 0{,}08$. Pour la probabilité conditionnelle $P_L(T)$, on ne considère que les 16 smartphones touchés par l'obsolescence logicielle : 2 d'entre eux sont également touchés techniquement, donc $P_L(T) = 2/16 = 0{,}125$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour un smartphone choisi au hasard : $P(T) = 0{,}03$, $P(L) = 0{,}08$ et $P_L(T) = 0{,}125$.

Question 3° a). À l'aide des questions précédentes, calculer la probabilité P(T ∩ L).

La probabilité d'être touché par les deux formes d'obsolescence est la probabilité d'être touché par l'obsolescence logicielle, multipliée par la probabilité d'être touché techniquement parmi ces smartphones. Ainsi, $P(T \cap L) = P(L) \times P_L(T) = 0{,}08 \times 0{,}125 = 0{,}01$. Cela correspond à 1 % de la population étudiée, soit 2 smartphones parmi les 200.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité qu'un smartphone soit touché par les deux obsolescences est $P(T \cap L) = 0{,}01$, soit 1 %.

Question 3° b). À l'aide des questions précédentes, calculer la probabilité P(T ∪ L).

L'événement $T \cup L$ signifie qu'au moins l'une des deux obsolescences touche le smartphone. En additionnant $P(T)$ et $P(L)$, les smartphones touchés par les deux sont comptés deux fois ; il faut donc retrancher leur probabilité d'intersection. Ainsi, $P(T \cup L) = P(T) + P(L) - P(T \cap L) = 0{,}03 + 0{,}08 - 0{,}01 = 0{,}10$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité qu'au moins une obsolescence touche le smartphone est $P(T \cup L) = 0{,}10$, soit 10 %.

Question 3° c). À l'aide des questions précédentes, calculer la probabilité P_T(L), c'est-à-dire la probabilité de L sachant que T est réalisé.

La probabilité de l'obsolescence logicielle sachant que le smartphone est touché techniquement se calcule parmi les seuls smartphones de l'événement T. Il y en a 6, dont 2 sont aussi touchés par l'obsolescence logicielle. On obtient donc $P_T(L) = P(T \cap L)/P(T) = 0{,}01/0{,}03 = 1/3$, soit environ $0{,}333$ à 10^{-3} près.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Parmi les smartphones touchés techniquement, la proportion aussi touchée par logiciel est $P_T(L) = 1/3 \approx 0{,}333$.

B. Loi binomiale

Question 1°. Justifier que la variable aléatoire X, qui compte les smartphones non réparables dans un lot de 50 modèles A, suit une loi binomiale, puis déterminer ses paramètres.

Chaque prélèvement est une épreuve de Bernoulli : le smartphone est non réparable avec la probabilité $p = 0{,}045$, ou réparable. Le stock étant suffisamment important, le tirage est assimilé à un tirage avec remise ; les 50 épreuves sont donc indépendantes et de même probabilité. La variable X, qui compte les smartphones non réparables, suit alors une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}045$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Le nombre de smartphones non réparables dans le lot suit la loi binomiale $X \sim \mathcal{B}(50\,;\,0{,}045)$.

Question 2°. Calculer la probabilité que, dans un lot de 50 smartphones, tous soient réparables.

Le lot est entièrement réparable si aucun des 50 smartphones n'est non réparable, c'est-à-dire si $X = 0$. Pour chaque appareil, la probabilité d'être réparable vaut $1 - 0{,}045 = 0{,}955$. Les tirages étant assimilés à des tirages avec remise, la probabilité cherchée est $P(X = 0) = 0{,}955^{50}$, soit environ $0{,}100$ à 10^{-3} près.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La probabilité que les 50 smartphones soient réparables est $0{,}955^{50} \approx 0{,}100$, arrondie à 10^{-3}.

Question 3° a). Faire tourner à la main l'algorithme donné, puis recopier et compléter le tableau avec les valeurs de P(X = i) et de S pour i allant de 0 à 3.

Pour chaque valeur de i, on utilise $P(X = i) = \binom{50}{i} 0{,}045^i 0{,}955^{50-i}$, puis on ajoute cette probabilité à la somme précédente. Les probabilités et les sommes cumulées sont arrondies au millième dans le tableau ; les sommes sont calculées à partir des valeurs non arrondies.

i	**0**	**1**	**2**	**3**
$P(X = i)$	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

Tableau de l'algorithme complété

i	0	1	2	3
$P(X = i)$	0,100	0,236	0,272	0,205
S	0,100	0,336	0,608	0,813

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour $i = 0, 1, 2, 3$, les sommes successives de l'algorithme sont $0{,}100$, $0{,}336$, $0{,}608$ et $0{,}813$.

Question 3° b). Donner la valeur de S à la fin de l'algorithme et interpréter le résultat.

À la fin de la boucle, les probabilités associées à $i = 0, 1, 2, 3$ ont toutes été ajoutées à S. Ainsi, $S = P(X \leq 3)$, soit la probabilité qu'au plus trois smartphones du lot soient non réparables. Le calcul avec les probabilités non arrondies donne environ $0{,}813$, soit 81,3 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

À la fin de l'algorithme, $S = P(X \leq 3) \approx 0{,}813$: environ 81,3 % des lots comptent au plus trois appareils non réparables.

Question 4°. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat.

Pour une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance vaut $E(X) = np$. Ici, $E(X) = 50 \times 0{,}045 = 2{,}25$. Cette espérance est une moyenne théorique : sur un grand nombre de lots de 50 smartphones, on compterait en moyenne 2,25 appareils non réparables par lot.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Un lot de 50 smartphones comporte en moyenne $E(X) = 50 \times 0{,}045 = 2{,}25$ appareils non réparables.

C. Test d'hypothèse

Question 1°. Sous l'hypothèse nulle H0, choisir la valeur de h, arrondie au centième, telle que P(0,55 - h ≤ F ≤ 0,55 + h) = 0,95. Une seule proposition est exacte et aucune justification n'est demandée.

Sous H_0, la loi normale est centrée en $0{,}55$ et son écart type vaut $0{,}037$. L'intervalle central de probabilité $0{,}95$ s'étend d'environ $1{,}96$ écarts types de part et d'autre de la moyenne. Ainsi, $h \approx 1{,}96 \times 0{,}037 = 0{,}07252$, ce qui s'arrondit au centième à $0{,}07$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La valeur approchée de h, arrondie au centième, est $0{,}07$: troisième proposition.

Question 2°. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de signification de 5 %.

Le test bilatéral au seuil de 5 % conserve les fréquences appartenant à l'intervalle central de probabilité 0,95 sous H_0. Avec $h \approx 0{,}07$, les bornes arrondies sont $0{,}55 - 0{,}07 = 0{,}48$ et $0{,}55 + 0{,}07 = 0{,}62$. La décision se prend en comparant la fréquence observée à cet intervalle.

- Si $0{,}48 \leq f \leq 0{,}62$, ne pas rejeter H_0.
- Sinon, rejeter H_0.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Ne pas rejeter H_0 si la fréquence observée appartient à $[0{,}48\,;\,0{,}62]$; la rejeter sinon.

Question 3°. Sur l'échantillon de 180 personnes, 76 pensent que la marque B pratique l'obsolescence programmée. Formuler la conclusion du test.

La fréquence observée dans l'échantillon vaut $f = 76/180 \approx 0{,}422$. Elle est inférieure à la borne basse, $0{,}48$, de l'intervalle de décision. La fréquence n'appartient donc pas à l'intervalle central retenu sous H_0. Au seuil de 5 %, on rejette l'hypothèse selon laquelle la proportion de personnes concernées est égale à 0,55.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La fréquence observée est hors de l'intervalle de décision : on rejette H_0, qui affirme que la proportion est de 55 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2018)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2018, code MATGRB1, d'une durée de 2 heures et à coefficient variable selon la spécialité : 1, 1,5, 2, 2,5 ou 3. Deux exercices de 10 points étudient le départ d'un train à très haute vitesse et l'obsolescence des smartphones, mobilisant équations différentielles, fonctions, intégrales, probabilités, loi binomiale et test d'hypothèse.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour résoudre y' - 0,2y = 3t, combiner une solution particulière avec les solutions de l'équation homogène associée.
- La distance est modélisée par f(t) et la vitesse instantanée par f'(t), avec t exprimé en minutes.
- Pour une loi binomiale de paramètres n et p, l'espérance vaut np et P(X = i) = C(n,i)p^i(1-p)^(n-i).
- Dans un test bilatéral, comparer la fréquence observée à l'intervalle de décision défini sous l'hypothèse nulle.

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités de temps et de vitesse, puis convertir les kilomètres par minute en kilomètres par heure pour comparer à l'objectif.
- Pour l'aire, exploiter la symétrie de la pièce et identifier précisément les domaines à intégrer.
- En probabilités conditionnelles, distinguer P(T sachant L) de P(L sachant T).
- Pour le test, appliquer la règle de décision au seuil donné et conclure au sujet de H0.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer la fonction distance à partir de l'équation différentielle ?

Résolvez d'abord l'équation homogène, puis ajoutez une solution particulière pour obtenir les solutions de l'équation complète. Utilisez ensuite la condition initiale f(0) = 0 pour déterminer la constante.

Q : Comment reconnaître et utiliser une loi binomiale dans cet exercice ?

Il faut un nombre fixé de tirages indépendants, deux issues possibles et une probabilité constante de succès. Ici, le nombre de smartphones non réparables parmi 50 suit une loi binomiale de paramètres 50 et 0,045.

Q : Comment organiser mon temps et arrondir les résultats ?

L'épreuve dure deux heures et comporte deux exercices de dix points. Répartissez le temps entre les exercices, gardez quelques minutes pour vérifier les calculs et arrondissez à 10^{-3} dans l'exercice 2, sauf indication contraire.

Q : Que faut-il faire pour conclure le test d'hypothèse ?

Appliquez la règle de décision à la fréquence observée, en utilisant le seuil de 5 % et l'intervalle associé à H0. Indiquez ensuite si les données conduisent à rejeter ou à ne pas rejeter l'hypothèse nulle.

Sujet officiel associé (PDF) : https://bts2m.fr/assets/annales/bts-2m/E2 - Mathématiques/2018/BTS 2M - E2 - Mathématiques - Session 2018 - 3-Sujet.pdf

Ressources BTS Métiers de la Mesure : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.