Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **2, sauf Traitement des matériaux : 3**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Freinage d'un chariot et étude de la fonction vitesse (12 questions) **Page 3**

2. Probabilités, durée de vie et intervalle de confiance (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://bts2m.fr/assets/annales/bts-2m/E2 - Mathématiques/2022/BTS 2M - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

1. Freinage d'un chariot et étude de la fonction vitesse

Un chariot de fête foraine, lancé à 20 m/s, est ralenti par un système de freinage. Sa vitesse est modélisée par une fonction étudiée au moyen d'une équation différentielle, de l'analyse de fonction, d'une intégrale et d'un développement limité.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1.a. Résoudre l'équation différentielle homogène (E_0) : y' + 0,8y = 0.

La formule donnée pour $y' + ay = 0$ est $y(t) = ke^{-at}$, avec $k \in \mathbb{R}$. Ici, $a = 0,8$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. Pour g définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5, vérifier que g est solution de (E) : y' + 0,8y = 4.

Pour $g(t) = 5$, on a $g'(t) = 0$.

Ainsi, $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$. Cette égalité étant vérifiée pour tout $t \geq 0$, g est bien solution de (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est solution de (E).

Question 1.c. Déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

1. La fonction constante 5 est une solution particulière de (E).
2. La différence entre toute solution de (E) et 5 est une solution de (E_0), donc vaut $ke^{-0,8t}$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0,8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

La solution générale est $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$. Comme $f(0) = 5 + k = 20$, on obtient $k = 15$. On remplace alors k dans l'expression générale.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1.a. Démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ est égale à 5.

On a $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Lorsque $t \to +\infty$, $-0,8t \to -\infty$, donc $e^{-0,8t} \to 0$. Par conséquent, $15e^{-0,8t} \to 0$ et la limite de $f(t)$ vaut 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1.b. Déduire de cette limite que la courbe C admet une asymptote et en donner une équation.

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ étant finie et égale à 5, la courbe C admet une asymptote horizontale d'ordonnée 5.

> Une asymptote horizontale a pour équation $y = L$, où L est la limite de la fonction.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y = 5$.

Question 2. Sachant que f'(t) = -12e^(-0,8t) sur [0 ; +∞[, dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.

Comme $e^{-0,8t} > 0$, on a $f'(t) < 0$ sur $[0; +\infty[$. La fonction décroît de $f(0) = 20$ vers sa limite 5.

t	**0**	$+\infty$
$f'(t)$	–	
$f(t)$	20	$\searrow 5$

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 5.

Question 3. À l'aide de l'étude de f, déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

Pour tout $t \geq 0$, $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5 > 5$. La vitesse ne s'annule donc jamais.

- Le chariot ralentit.
- Selon ce modèle, il ne s'arrête pas et sa vitesse tend vers $5\ \mathrm{m\backslash cdotp s^{-1}}$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : la vitesse reste positive et tend vers $5\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

Question 4.a. Pour F définie par F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t, vérifier que F est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

En dérivant $F(t) = -18,75e^{-0,8t} + 5t$, on obtient $F'(t) = (-18,75)(-0,8)e^{-0,8t} + 5 = 15e^{-0,8t} + 5$. Or cette expression est $f(t)$. Donc F est une primitive de f.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$F'(t) = f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Question 4.b. Sachant que la distance parcourue entre t_0 et t_1 est d = ∫[t_0 à t_1] f(t)dt, calculer la distance exacte parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner son arrondi au centimètre.

Une primitive étant F, la distance est $d = F(1) - F(0)$. Ainsi, $d = (-18,75e^{-0,8} + 5) - (-18,75) = 23,75 - 18,75e^{-0,8}$ mètres. L'évaluation numérique donne environ $15,3251$ mètres, soit $15,33$ mètres au centimètre près.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$d = 23,75 - 18,75e^{-0,8}\ \mathrm{m} \approx 15,33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. Parmi les propositions, recopier l'unique développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro qui est exact. Aucune justification n'est demandée.

La troisième proposition est la seule qui conserve les termes du polynôme affiché et présente le reste sous la forme $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$f(t) = 20 - 12t + 4,8t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$: troisième proposition.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

L'équation de la tangente en 0 est $y = f(0) + f'(0)t$. Or $f(0) = 20$ et $f'(0) = -12e^0 = -12$. En remplaçant ces valeurs, on obtient l'équation de T.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$T : y = 20 - 12t$.

2. Probabilités, durée de vie et intervalle de confiance

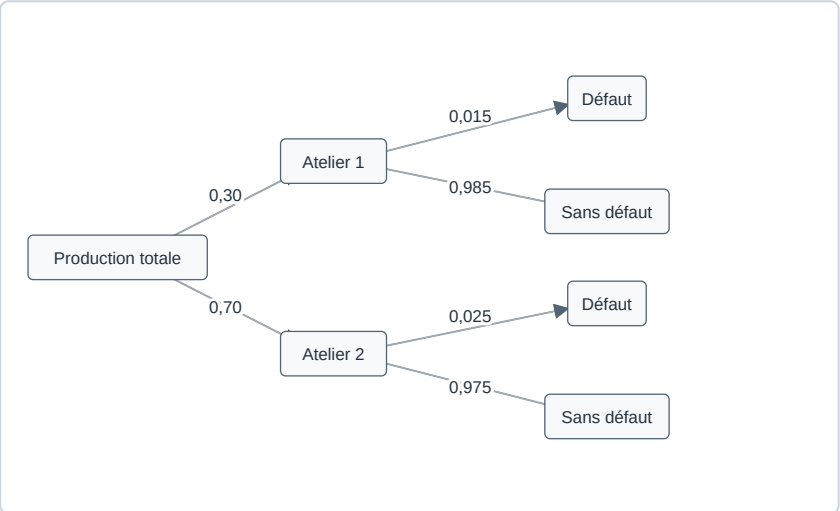
Une usine fabrique des tubes fluorescents dans deux ateliers, avec des proportions de production et des taux de défaut distincts. L'exercice porte aussi sur la durée de vie des tubes et sur l'estimation de la proportion de rivets conformes à partir d'un échantillon de 1 000 rivets.

Partie A - Probabilités conditionnelles

Question 1. Réaliser un arbre pondéré décrivant la situation : provenance des tubes selon l'atelier, puis présence ou absence d'un défaut.

Le premier niveau représente le choix de l'atelier, avec les proportions de production. Au second niveau, les probabilités de défaut sont conditionnelles à l'atelier. Les probabilités de non-défaut se déduisent par complément : pour chaque atelier, défaut et non-défaut totalisent 1. L'arbre ci-dessous reprend les données exactes de l'énoncé.

Atelier d'origine puis présence ou absence d'un défaut



Les branches du second niveau portent les probabilités conditionnelles à l'atelier.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Atelier 1 : 0,30 ; atelier 2 : 0,70. Les probabilités conditionnelles de défaut sont respectivement 0,015 et 0,025.

Question 2. Calculer la probabilité qu'un tube prélevé provienne de l'atelier 1 et présente un défaut, soit P(A₁ ∩ D).

1. La probabilité de suivre successivement la branche « atelier 1 » puis la branche « défaut » est le produit des probabilités correspondantes. Ainsi, $P(A_1 \cap D) = P(A_1)P(D \mid A_1) = 0{,}30 \times 0{,}015 = 0{,}0045$. Cette probabilité conjointe représente aussi 0,45 % de la production totale.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(A_1 \cap D) = 0{,}0045$, soit 0,45 %.

Question 3. **Montrer que P(D) est égale à la valeur donnée dans l'énoncé. La valeur imprimée 0,0195 est barrée et une correction manuscrite indique 0,0220.**

Les deux chemins de l'arbre qui aboutissent à un tube défectueux sont disjoints : le tube provient soit de l'atelier 1, soit de l'atelier 2. On additionne donc leurs probabilités : $P(D) = 0{,}30 \times 0{,}015 + 0{,}70 \times 0{,}025 = 0{,}0045 + 0{,}0175 = 0{,}0220$. La valeur manuscrite corrige bien la valeur imprimée barrée.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(D) = 0{,}0220$, soit 2,20 %.

Question 4. **Sachant que le tube prélevé ne présente pas de défaut, calculer la probabilité qu'il provienne de l'atelier 2.**

On conditionne sur l'absence de défaut. La probabilité de cet événement est $1 - P(D) = 1 - 0{,}0220 = 0{,}978$. L'événement « atelier 2 et sans défaut » a pour probabilité $0{,}70 \times 0{,}975 = 0{,}6825$.

- Donc $P(A_2 \mid \overline{D}) = \dfrac{0{,}6825}{0{,}978} \approx 0{,}698$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La probabilité cherchée est environ 0,698, soit 69,8 %.

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

Question 1. **La durée de bon fonctionnement T suit une loi exponentielle de paramètre λ = 0,0001. Déterminer E(T) et interpréter le résultat dans le contexte.**

Pour une loi exponentielle de paramètre λ, la formule de l'énoncé donne $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$. En remplaçant par $\lambda = 0{,}0001$, on obtient $E(T) = \dfrac{1}{0{,}0001} = 10\,000$ heures. L'espérance décrit la durée moyenne de bon fonctionnement des tubes, et non la durée garantie de chaque tube.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $E(T) = 10\,000$ heures : durée moyenne de bon fonctionnement d'un tube.

Question 2. **Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit inférieure à 8 000 heures.**

1. La formule de l'énoncé est $P(T \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$. Avec $t = 8\,000$ et $\lambda = 0{,}0001$, on calcule $P(T < 8\,000) = 1 - e^{-0{,}0001 \times 8\,000} \approx 0{,}5507$. La loi exponentielle étant continue, les probabilités pour $T < 8\,000$ et $T \leq 8\,000$ sont égales. L'arrondi au centième est 0,55.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T < 8\,000) \approx 0{,}55$, arrondi au centième.

Question 3. Calculer, à 10^{-2} près, la probabilité que la durée de bon fonctionnement d'un tube prélevé soit supérieure à 10 000 heures.

La probabilité de dépasser une durée donnée est le complément de la probabilité de lui être inférieur ou égal. D'après la fonction de répartition fournie, $P(T > 10\,000) = 1 - P(T \leq 10\,000) = e^{-0{,}0001 \times 10\,000} = e^{-1} \approx 0{,}3679$. À deux décimales, cette probabilité vaut 0,37.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$P(T > 10\,000) \approx 0{,}37$, arrondi au centième.

Partie C - Intervalle de confiance

Question 1. Dans un échantillon de 1 000 rivets, 975 sont conformes. Donner une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p de rivets conformes.

```
f = nombre de rivets conformes / nombre de rivets prélevés
f = 975 / 1000 = 0,975
```

La fréquence observée des rivets conformes dans l'échantillon constitue l'estimation ponctuelle de la proportion inconnue p. Elle s'exprime aussi en pourcentage : 97,5 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Estimation ponctuelle : $f = 0{,}975$, soit 97,5 %.

Question 2. À l'aide de la formule fournie, déterminer un intervalle de confiance centré sur f pour la proportion p au niveau de confiance de 95 %, puis arrondir les bornes à 10^{-3} près.

Étape	Calcul	Valeur
Fréquence observée	$f = 975/1000$	0,975
Marge	$1{,}96\sqrt{0{,}975(1-0{,}975)/1000}$	≈ 0,009677
Bornes non arrondies	$f \pm \text{marge}$	[0,965323 ; 0,984677]

On applique la formule de l'énoncé avec $n = 1000$, puis on arrondit séparément les deux bornes au millième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Intervalle de confiance à 95 % : $[0{,}965\ ;\ 0{,}985]$.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, groupement B, session 2022, code 22MATGRB1, d'une durée de 2 heures et de coefficient 2, sauf en Traitement des matériaux où il est de 3. Les deux exercices de 10 points étudient le freinage d'un chariot par équation différentielle et analyse de fonction, puis la conformité de tubes et rivets par probabilités, loi exponentielle et intervalle de confiance.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Les solutions de y' + ay = 0 sont de la forme y(t) = ke^(-at) ; une solution particulière donne les solutions de l'équation avec second membre.
- Si f(t) tend vers L quand t tend vers +∞, la courbe de f admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- Pour une loi exponentielle de paramètre λ, P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt), P(T > t) = e^(-λt) et E(T) = 1/λ.
- L'intervalle de confiance donné pour une proportion est [f - 1,96√(f(1-f)/n ; f + 1,96√(f(1-f)/n)].

Points de vigilance & attentes du jury

- Respecter les unités du modèle du chariot : vitesse en m/s, temps en secondes et distance en mètres.
- Distinguer P(A ∩ B) d'une probabilité conditionnelle et préciser l'événement auquel la condition se rapporte.
- Pour la loi exponentielle, vérifier que λ et la durée utilisent la même unité, ici l'heure.
- Dans l'intervalle de confiance, prendre n = 1 000 et arrondir les bornes à 10^{-3} près comme demandé.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment calculer la distance parcourue à partir de la fonction vitesse ?

La distance entre deux instants est l'intégrale de la vitesse sur cet intervalle. Avec une primitive F, on calcule $F(t_1) - F(t_0)$, puis on exprime le résultat dans l'unité demandée.

Q : Comment calculer une probabilité de durée de vie avec une loi exponentielle ?

Pour une durée T de paramètre λ, P(T ≤ t) = 1 - e^(-λt) et P(T > t) = e^(-λt). Il faut vérifier que t est exprimé dans l'unité correspondant au paramètre λ.

Q : Comment organiser le temps pour cette épreuve ?

L'épreuve dure 2 heures et comporte deux exercices de 10 points, chacun divisé en trois parties indépendantes. Commencez par les questions accessibles, justifiez les calculs et gardez du temps pour vérifier les unités et les arrondis.

Q : Quel coefficient s'applique selon la spécialité et quel barème est indiqué ?

Le coefficient est 2 pour les spécialités indiquées dans le tableau, sauf Traitement des matériaux, dont le coefficient est 3. Chaque exercice vaut 10 points ; aucune répartition détaillée des points par question n'est imprimée.

Sujet officiel associé (PDF) : https://bts2m.fr/assets/annales/bts-2m/E2 - Mathématiques/2022/BTS 2M - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 1-Sujet.pdf

Ressources BTS Métiers de la Mesure : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.