Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS MÉTIERS DE LA MESURE • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques

Session 2022 • Code sujet : **22MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot en freinage (12 questions) **Page 3**

2. Signaux d'entrée et de sortie d'un système électrique (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 11**

Sujet officiel (PDF) : https://bts2m.fr/assets/annales/bts-2m/E2 - Mathématiques/2022/BTS 2M - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

1. Modélisation et étude de la vitesse d'un chariot en freinage

Un chariot de fête foraine se déplace initialement à 20 m/s avant d'être ralenti par un système de freinage. L'étude de sa vitesse porte sur une équation différentielle, ses variations, la distance parcourue et son développement limité au voisinage de zéro.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle

Question 1. a. Résoudre sur l'intervalle considéré l'équation différentielle homogène y' + 0,8y = 0, en utilisant la formule fournie.

La formule fournie donne, pour une équation de la forme $y' + ay = 0$, les solutions $y(t) = ke^{-at}$, où k est une constante réelle. Ici, le coefficient de y vaut $a = 0{,}8$. On remplace donc directement a par cette valeur. Ces fonctions sont dérivables sur l'intervalle considéré $[0; +[$ et constituent toutes les solutions de l'équation homogène.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = ke^{-0{,}8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 1. b. Vérifier que la fonction g définie sur [0 ; +∞[par g(t) = 5 est solution de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

1. La fonction $g(t) = 5$ est constante, donc $g'(t) = 0$.
2. En remplaçant g et sa dérivée dans le membre de gauche de (E), on obtient $g'(t) + 0{,}8g(t) = 0 + 0{,}8 \times 5 = 4$. Cette égalité est vérifiée pour tout $t \in [0; +[$. Le membre de gauche est donc égal au membre de droite, ce qui prouve que g est une solution particulière de (E).

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 5$ est une solution particulière de (E).

Question 1. c. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) : y' + 0,8y = 4.

La fonction constante $g(t) = 5$ est une solution particulière de (E). La différence entre deux solutions de l'équation complète est une solution de l'équation homogène associée $y' + 0{,}8y = 0$. D'après la question précédente, cette différence est de la forme $ke^{-0{,}8t}$, où k est réel. On obtient ainsi toutes les solutions en ajoutant ce terme à la solution particulière.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 5 + ke^{-0{,}8t}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

Question 2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition initiale f(0) = 20.

1. La solution générale de (E) est $f(t) = 5 + ke^{-0,8t}$.
2. À l'instant initial, $f(0) = 5 + k$, car $e^0 = 1$. La condition $f(0) = 20$ impose donc $k = 20 - 5 = 15$. En substituant cette valeur dans la solution générale, on obtient la fonction qui modélise la vitesse du chariot pendant le freinage.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

Question 1. a. À partir de l'expression f(t) = 15e^(-0,8t) + 5, démontrer que la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞ vaut 5.

Lorsque $t \to +\infty$, l'exposant $-0,8t$ tend vers $-\infty$. Par conséquent, $e^{-0,8t} \to 0$, puis $15e^{-0,8t} \to 0$. Dans l'expression $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$, le premier terme tend donc vers zéro tandis que le second reste constant. La limite de la somme est ainsi égale à 5.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 5$.

Question 1. b. Déduire de la limite précédente que la courbe C admet une asymptote, puis en donner une équation.

La limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$ est finie et vaut 5. Par définition, la courbe représentative de f admet alors une asymptote horizontale d'ordonnée 5. Elle se rapproche de cette droite lorsque le temps augmente. Cette asymptote décrit la vitesse vers laquelle tend le chariot, sans qu'il l'atteigne à un instant fini.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Asymptote horizontale : $y = 5$.

Question 2. Sachant que f'(t) = -12e^(-0,8t), dresser le tableau de variation de f sur [0 ; +∞[.

Pour tout $t \geq 0$, $e^{-0,8t} > 0$. Ainsi, $f'(t) = -12e^{-0,8t} < 0$, donc f est strictement décroissante sur $[0; +[$. Son départ vaut $f(0) = 15 + 5 = 20$, et sa limite en $+\infty$ est 5. Le tableau indique les variations et la limite de la fonction.

t	**0**	$+\infty$
Signe de $f'(t)$	$-$	
Variation de f	20	$\searrow$ 5

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> f décroît strictement de 20 vers 5 sur $[0;+[$.

Question 3. Déterminer si le système de freinage permet au chariot de s'arrêter.

La vitesse est $f(t) = 15e^{-0,8t} + 5$. Pour tout instant fini $t \geq 0$, le terme exponentiel est strictement positif, donc $f(t) > 5$. La vitesse diminue et tend vers $5\ \mathrm{m/s}$, mais n'atteint jamais zéro. Le système ralentit le chariot sans permettre son arrêt selon ce modèle.

- Vitesse limite : $5\ \mathrm{m/s}$.
- La vitesse reste positive à tout instant fini.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : le chariot ne s'arrête pas, sa vitesse tend vers $5\ \mathrm{m/s}$.

Question 4. a. Vérifier que F(t) = -18,75e^(-0,8t) + 5t est une primitive de f sur [0 ; +∞[.

On dérive chaque terme de $F(t) = -18{,}75e^{-0,8t} + 5t$. Par la dérivation d'une exponentielle composée, le premier terme a pour dérivée $(-18{,}75)(-0{,}8)e^{-0,8t} = 15e^{-0,8t}$. Le second terme a pour dérivée 5. Ainsi, $F'(t) = 15e^{-0,8t} + 5 = f(t)$, ce qui vérifie que F est une primitive de f.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $F'(t) = f(t)$, donc F est une primitive de f.

Question 4. b. En utilisant la relation donnée entre la distance parcourue et l'intégrale de la vitesse, calculer la valeur exacte de la distance parcourue entre $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$, puis donner une valeur arrondie au centimètre.

La distance parcourue entre 0 et 1 seconde vaut $d = F(1) - F(0)$. En évaluant la primitive, $F(1) = -18{,}75e^{-0,8} + 5$ et $F(0) = -18{,}75$. Ainsi, $d = 23{,}75 - 18{,}75e^{-0,8}$ mètres. La valeur approchée est arrondie au centimètre, comme demandé.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $d = 23{,}75 - 18{,}75e^{-0,8}\ \mathrm{m} \approx 15{,}33\ \mathrm{m}$.

Partie C - Étude locale

Question 1. Choisir, parmi les propositions, le développement limité de f à l'ordre 2 au voisinage de zéro. Une seule réponse est exacte, aucune justification n'est demandée et une réponse fausse, multiple ou absente ne rapporte ni n'enlève de point.

Le polynôme affiché par le logiciel est $20 - 12t + \frac{24}{5}t^2$. Pour un développement limité à l'ordre 2, le terme de reste s'écrit $t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$. La proposition exacte est donc celle qui ajoute ce reste au polynôme affiché. La première proposition place le reste au mauvais ordre et la deuxième omet des termes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $f(t) = 20 - 12t + \frac{24}{5}t^2 + t^2\varepsilon(t)$, avec $\varepsilon(t) \to 0$.

Question 2. Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0.

1. L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est $y = f(0) + f'(0)t$.
2. On a $f(0) = 20$ et, d'après la dérivée donnée, $f'(0) = -12e^0 = -12$. La tangente a donc pour ordonnée à l'origine 20 et pour coefficient directeur -12. En reportant ces valeurs dans l'équation de la tangente, on obtient son équation réduite.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $T : y = -12t + 20$.

2. Signaux d’entrée et de sortie d’un système électrique

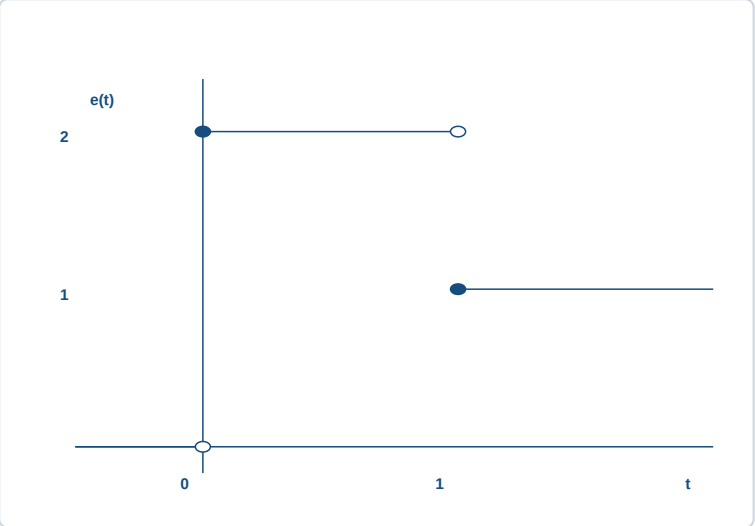
Un système électrique causal reçoit le signal e(t) = 2U(t) - U(t - 1) et possède pour fonction de transfert H(p) = 1/(p + 1). Les transformées de Laplace servent à déterminer les expressions des signaux d’entrée et de sortie, puis à en tracer les courbes.

Partie A - Signal d’entrée

Question 1. Sur le document-réponse à rendre avec la copie, tracer la courbe représentative de la fonction e(t).

La causalité donne $e(t) = 0$ pour $t < 0$. À $t = 0$, le signal passe à 2 ; à $t = 1$, il passe à 1. Les points pleins et ouverts indiquent les valeurs prises et non prises aux sauts.

Courbe du signal d’entrée e(t)



✓ RÉPONSE À RETENIR

$e(t) = 0$ si $t < 0$, $e(t) = 2$ si $0 \leq t < 1$, et $e(t) = 1$ si $t \geq 1$.

Question 2. Déterminer la transformée de Laplace E(p) du signal d’entrée e(t).

Par linéarité et d’après le formulaire, $\mathcal{L}\{U(t)\} = 1/p$ et $\mathcal{L}\{U(t-1)\} = e^{-p}/p$. Ainsi, la transformée de $e(t) = 2U(t) - U(t-1)$ est $E(p) = 2/p - e^{-p}/p$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$E(p) = \frac{2 - e^{-p}}{p}.$$

Partie B - Signal de sortie

Question 1. Démontrer que S(p) = 2/[p(p + 1)] - [1/[p(p + 1)]]e^(-p).

La relation entrée-sortie donne $S(p) = H(p)E(p)$. En substituant $H(p) = 1/(p+1)$ et $E(p) = (2 - e^{-p})/p$, puis en distribuant le facteur $1/(p+1)$, on obtient directement les deux termes demandés, avec le signe moins devant le terme retardé.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$S(p) = \frac{2}{p(p+1)} - \frac{e^{-p}}{p(p+1)}.$$

Question 2. Vérifier que 1/[p(p + 1)] = 1/p - 1/(p + 1).

En réduisant le membre de droite au dénominateur commun $p(p+1)$, son numérateur vaut $(p+1) - p = 1$. L'égalité est donc vérifiée pour les valeurs de p où les expressions sont définies.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}.$$

Question 3. Donner les transformées de Laplace inverses de 1/p, de 1/(p + 1), de (1/p)e^(-p) et de (1/(p + 1))e^(-p), en utilisant le formulaire.

Les deux premières inverses viennent directement du formulaire. Pour les deux autres, la propriété de retard d'une unité multiplie la transformée par e^{-p} et décale le signal d'une unité.

Transformée	Transformée inverse
$1/p$	$U(t)$
$1/(p+1)$	$e^{-t}U(t)$
e^{-p}/p	$U(t-1)$
$e^{-p}/(p+1)$	$e^{-(t-1)}U(t-1)$

✓ RÉPONSE À RETENIR

Dans l'ordre : $U(t)$, $e^{-t}U(t)$, $U(t-1)$, $e^{-(t-1)}U(t-1)$.

Question 4. **Déduire des résultats précédents l'expression de s(t) sur l'intervalle [0 ; 1[.**

La décomposition en éléments simples donne $S(p) = 2(1/p - 1/(p+1)) - e^{-p}(1/p - 1/(p+1))$. Sur $[0;1[$, le terme retardé est nul. Les inverses des termes non retardés sont $U(t)$ et $e^{-t}U(t)$, d'où l'expression de $s(t)$ sur cet intervalle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour $0 \leq t < 1$, $s(t) = 2(1 - e^{-t})$.

Question 5. a. **Sachant que s(t) = (e - 2)e^(-t) + 1 sur [1 ; +∞[, calculer s(1) et donner sa valeur exacte puis une valeur approchée au dixième.**

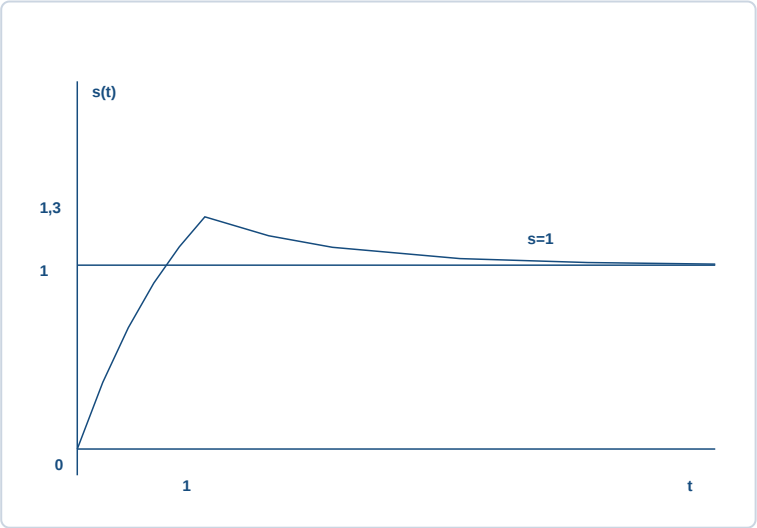
En évaluant l'expression donnée en $t = 1$, on obtient $s(1) = (e-2)e^{-1} + 1 = 2 - 2/e$. Avec $e \approx 2{,}71828$, cela donne $s(1) \approx 1{,}264$, soit 1,3 au dixième.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $s(1) = 2 - \dfrac{2}{e} \approx 1{,}3$.

Question 5. b. **Sur le document-réponse à rendre avec la copie, compléter la courbe représentative de la fonction s.**

Sur $[0;1[$, la courbe suit $s(t) = 2(1 - e^{-t})$. Elle rejoint en $t = 1$ le point de hauteur $2 - 2/e \approx 1{,}3$. Pour $t \geq 1$, la branche suit $s(t) = (e-2)e^{-t} + 1$, décroît et se rapproche de l'asymptote horizontale $s = 1$.

Courbe du signal de sortie s(t)



> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La courbe part de $(0;0)$, passe par $(1; 2 - 2/e)$, puis tend vers $s = 1$.

Question 5. c. Donner la limite de la fonction s(t) lorsque t tend vers +∞.

Pour $t \geq 1$, $s(t) = (e-2)e^{-t} + 1$. Comme e^{-t} tend vers zéro lorsque t tend vers $+\infty$, le terme exponentiel s'annule à la limite et il reste la constante 1.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lim_{t \to +\infty} s(t) = 1.$

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : L'épreuve de mathématiques du BTS, session 2022, groupement B, porte le code 22MATGRB2 et dure deux heures. Son coefficient varie selon la spécialité : 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et 2 en Électrotechnique. Les deux exercices évaluent équations différentielles, étude de fonctions, calcul intégral, développement limité et transformées de Laplace, appliqués au freinage d'un chariot et à un système électrique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour y' + ay = 0, les solutions sont y(t) = ke^(-at) ; une solution particulière permet de construire celles de l'équation avec second membre.
- Si f(t) tend vers L quand t tend vers +∞, la courbe admet l'asymptote horizontale d'équation y = L.
- Au voisinage de zéro, le développement limité à l'ordre 2 s'écrit f(t) = f(0) + f'(0)t + f''(0)t²/2 + t²ε(t), avec ε(t) qui tend vers 0.
- Le décalage f(t - a)U(t - a) correspond en transformée de Laplace à e^(-ap)F(p).

Points de vigilance & attentes du jury

- Pour l'équation différentielle, distinguer la solution de l'équation homogène d'une solution particulière avant d'appliquer la condition initiale.
- Pour le tableau de variation, justifier le signe de la dérivée sur tout l'intervalle étudié.
- Pour calculer une distance, évaluer la primitive aux deux bornes dans le bon ordre et respecter l'arrondi demandé.
- Pour les signaux décalés, appliquer le facteur e^(-ap) et tenir compte de l'intervalle de temps demandé.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment déterminer les solutions d'une équation différentielle avec un second membre constant ?

Résolvez d'abord l'équation homogène, puis trouvez une solution particulière. La somme des deux donne les solutions générales ; utilisez ensuite la condition initiale pour déterminer la constante.

Q : Comment passer de la transformée de Laplace au signal temporel décalé ?

Repérez d'abord la transformée de la fonction non décalée. Le facteur e^(-ap) indique un retard de a unités : la fonction temporelle correspondante est décalée et multipliée par U(t - a).

Q : Comment organiser les deux exercices pendant les deux heures ?

Répartissez le temps entre les deux exercices de 10 points et évitez de laisser une partie entière de côté. Gardez quelques minutes pour vérifier les calculs, les unités, les courbes et les réponses à reporter.

Q : Quelles précautions prendre pour les résultats numériques et graphiques ?

Présentez les calculs exacts avant tout arrondi et respectez la précision demandée. Sur le document-réponse, tracez les courbes avec soin et veillez à la cohérence des points, des intervalles et des valeurs indiquées.

Sujet officiel associé (PDF) : https://bts2m.fr/assets/annales/bts-2m/E2 - Mathématiques/2022/BTS 2M - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Métiers de la Mesure : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.