Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS - Groupement D1

Session 2022 • Code sujet : **22-MATGRD1** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **Analyses de biologie médicale : 1 ; Bio analyses et contrôles : 2 ; Biotechnologies : 1 ; Europlastics et composites : 1,5 ; Bioqualité : 2**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Modélisation de l'évolution du nombre de personnes équipées d'un implant médical (13 questions) **Page 3**

2. Probabilités, pannes et contrôle de la qualité d'une machine à embouteiller (9 questions) **Page 7**

3. Ce qu'il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 10**

Sujet officiel (PDF) : https://bts2m.fr/assets/annales/bts-2m/E2 - Mathématiques/2022/BTS 2M - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf

1. Modélisation de l’évolution du nombre de personnes équipées d’un implant médical

Dans un pays de 60 millions d’habitants, des données de 2013 à 2021 décrivent le nombre de personnes équipées d’un implant médical, exprimé en milliers. Deux modèles sont étudiés : un ajustement exponentiel par changement de variable et un modèle défini à partir d’une équation différentielle.

Partie A

Question 1. Compléter le tableau fourni en annexe à rendre avec la copie, en utilisant le changement de variable y = ln(N - 30), et arrondir les valeurs au millième.

Pour chaque année, on applique le changement de variable avec N_i exprimé en milliers, puis on arrondit au millième.

Année	Rang k_i	N_i	$y_i = \ln(N_i - 30)$
2013	0	56,25	3,268
2014	1	58,1	3,336
2015	2	60,5	3,418
2016	3	63	3,497
2017	4	65,8	3,578
2018	5	68,7	3,656
2019	6	72	3,738
2020	7	75,5	3,818
2021	8	79,3	3,898

✓ RÉPONSE À RETENIR

Valeurs de y_i : 3,268 ; 3,336 ; 3,418 ; 3,497 ; 3,578 ; 3,656 ; 3,738 ; 3,818 ; 3,898.

Question 2.a. À l’aide de la calculatrice, déterminer par la méthode des moindres carrés une équation de la droite d’ajustement du nuage de points $M_i(k_i ; y_i)$, sous la forme y = ak + b, avec a et b arrondis au centième.

La régression linéaire des neuf points $(k_i ; y_i)$ donne, avant arrondi, un coefficient directeur d’environ $0,0794$ et une ordonnée à l’origine d’environ $3,2606$. En arrondissant chacun au centième comme demandé, on obtient la droite d’ajustement.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$y = 0,08k + 3,26$.

Question 2.b. **À partir de l'équation de la droite d'ajustement, déduire que le nombre de personnes équipées, exprimé en milliers et en fonction du rang k, peut être modélisé par N(k) = 30 + 26,05e^(0,08k).**

Comme $y = \ln(N - 30)$, la droite d'ajustement conduit à $\ln(N - 30) = 0,08k + 3,26$. En exponentiant, $N = 30 + e^{3,26}e^{0,08k}$, avec $e^{3,26} \approx 26,05$. Le nombre N est exprimé en milliers.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $N(k) = 30 + 26,05e^{0,08k}$, en milliers de personnes.

Question 3.a. **En supposant que le modèle proposé reste valable, déterminer au millier près le nombre de personnes qui devraient être équipées de l'implant en 2026.**

Le rang de 2026 est $k = 2026 - 2013 = 13$. En remplaçant dans le modèle, on obtient $N(13) = 30 + 26,05e^{0,08\times 13} \approx 103,701$ milliers. L'arrondi au millier près porte sur le nombre de personnes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Environ 104 000 personnes.

Question 3.b. **En supposant que le nombre d'habitants du pays reste stable à long terme, indiquer si le modèle étudié reste valide à long terme et justifier la réponse.**

Dans le modèle, $N(k) = 30 + 26,05e^{0,08k}$ tend vers $+\infty$ lorsque k augmente. Pourtant, la population du pays reste fixée à 60 millions, soit 60 000 milliers. Le modèle finirait donc par prévoir davantage de personnes équipées qu'il n'y a d'habitants.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Non : le modèle tend vers $+\infty$ et dépasse nécessairement la population stable de 60 millions.

Partie B

Question 1.a. **Résoudre sur l'intervalle [0 ; +∞[l'équation différentielle homogène y' + 0,05y = 0.**

L'équation s'écrit $y' = -0,05y$. Les solutions de $y' = ay$ sont $y(t) = Ce^{at}$, où C est une constante réelle. Ici, $a = -0,05$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = Ce^{-0,05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.b. **Déterminer une solution constante de l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

Pour une solution constante $y(t) = c$, on a $y' = 0$. L'équation devient $0,05c = 0,05$, donc $c = 1$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Une solution constante est $y(t) = 1$.

Question 1.c. **Résoudre sur l'intervalle [0 ; +∞[l'équation différentielle (E) : y' + 0,05y = 0,05.**

Une solution particulière de (E) est la constante 1, et les solutions de l'équation homogène associée sont $Ce^{-0,05t}$. La solution générale de (E) est donc la somme de ces deux expressions.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $y(t) = 1 + Ce^{-0,05t}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Question 1.d. **Sachant que g(0) = 8, déduire une expression de la fonction g sur l'intervalle [0 ; +∞[.**

Dans la solution générale, la condition $g(0) = 8$ donne $1 + C = 8$, puisque $e^0 = 1$. Ainsi, $C = 7$.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $g(t) = 1 + 7e^{-0,05t}$.

Question 2. **À partir du modèle f(t) = 450/(1 + 7e^(-0,05t)), déterminer au millier près combien de personnes seront équipées de l'implant en 2026, où t désigne le nombre d'années depuis 2013.**

Pour 2026, $t = 2026 - 2013 = 13$. Le modèle donne $f(13) = \dfrac{450}{1 + 7e^{-0,05 \times 13}} \approx 96,684$ milliers. On arrondit ce résultat au millier de personnes près.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Environ 97 000 personnes.

Question 3. **Déterminer la limite de f en +∞ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.**

Lorsque $t \to +\infty$, $e^{-0,05t} \to 0$. Le dénominateur de $f(t)$ tend donc vers 1. Comme f est exprimée en milliers de personnes, la limite correspond à 450 000 personnes.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 450$, soit 450 000 personnes.

Question 4. À l'aide de l'expression fournie de f'(t), déterminer le sens de variation de f sur [0 ; +∞[et interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

On a $f'(t) = \dfrac{315e^{-0{,}05t}}{2(1+7e^{-0{,}05t})^2}$. Pour tout $t \geq 0$, l'exponentielle et le dénominateur sont strictement positifs, donc $f'(t) > 0$. La fonction est strictement croissante sur l'intervalle considéré.

✓ RÉPONSE À RETENIR

f est strictement croissante : le modèle prévoit une augmentation continue du nombre de personnes équipées.

Question 5. Déterminer à partir de quelle année le nombre de personnes équipées de l'implant dépassera 120 000, soit 120 milliers, et expliquer la méthode employée.

Résoudre $f(t) > 120$ revient à résoudre $e^{-0{,}05t} < \dfrac{11}{28}$, soit $t > \dfrac{-\ln(11/28)}{0{,}05} \approx 18{,}686$. Le seuil est donc franchi au cours de l'année 2031. Au premier rang annuel entier où le nombre dépasse 120 milliers, $t = 19$, ce qui correspond à 2032.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Franchissement au cours de 2031 ; au premier millésime entier, le seuil est dépassé en 2032.

2. Probabilités, pannes et contrôle de la qualité d'une machine à embouteiller

Dans une usine, une machine à embouteiller est alimentée par un réservoir d'eau et une file de bouteilles vides. L'exercice porte sur les défauts d'approvisionnement, les pannes sur 200 jours et un test statistique relatif au volume d'eau des bouteilles remplies.

Partie A - Défaut d'approvisionnement

Question 1. Associer chacune des quatre phrases numérotées du tableau de gauche à l'information correspondante du tableau de droite, parmi les événements et probabilités proposés. Aucune justification n'est demandée.

On utilise le complémentaire pour la phrase 1, l'indépendance pour la phrase 3 et la réunion pour la phrase 4. La phrase 2 décrit directement la réalisation de A sans B.

Phrase	Information associée
1	E : 0,97
2	C : $A \cap \bar{B}$
3	F : 0,0006
4	D : 0,0494

En effet, $P(\bar{A}) = 1 - 0{,}03$; $P(A \cap B) = 0{,}03 \times 0{,}02$; $P(A \cup B) = 0{,}03 + 0{,}02 - 0{,}0006$.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

1-E ; 2-C ; 3-F ; 4-D.

Partie B - Pannes de la machine

Question 1. Donner, sans justification, la loi de probabilité suivie par X, qui compte le nombre de jours de panne sur une période de 200 jours, et préciser ses paramètres.

Chaque journée correspond à une épreuve de Bernoulli : la machine tombe en panne avec la probabilité constante 0,025, et les journées sont indépendantes. La variable X compte le nombre de pannes au cours de 200 journées. Elle suit donc une loi binomiale, dont le premier paramètre est le nombre d'épreuves et le second la probabilité de panne à chaque épreuve.

✓ **RÉPONSE À RETENIR**

$X \sim \mathcal{B}(200\,;\,0,025)$.

Question 2.a. **La loi de X étant approchée par une loi de Poisson de paramètre λ, justifier que λ = 5.**

Pour approcher une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ par une loi de Poisson, on prend pour paramètre le produit np. Ici, le nombre de journées est 200 et la probabilité de panne par journée est 0,025. On obtient donc $\lambda = np = 200 \times 0,025 = 5$, conformément au paramètre demandé pour la loi de Poisson approchant celle de X.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $\lambda = 5$.

Question 2.b. **Pour Y suivant la loi de Poisson de paramètre λ, donner la valeur de P(Y ≤ 10), arrondie à 10^{-3}.**

Pour une loi de Poisson de paramètre 5, on additionne les probabilités de 0 à 10 inclus : $P(Y \leq 10) = \sum_{k=0}^{10} \frac{5^k e^{-5}}{k!} \approx 0,9863047$. L'arrondi au millième demandé donne 0,986.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> $P(Y \leq 10) \approx 0,986$.

Question 2.c. **La représentation graphique suggère que P(Y = 15) est égale à 0. À l'aide de la formule donnée pour la loi de Poisson, dire si cette conjecture est vraie ou fausse et justifier.**

La formule de la loi de Poisson donne, pour $k = 15$ et $\lambda = 5$, $P(Y = 15) = \frac{5^{15} e^{-5}}{1 \times 2 \times \cdots \times 15} \approx 0,000157245$. Cette probabilité est très faible, ce qui explique qu'elle ne soit pas visible sur le graphique, mais elle n'est pas nulle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La conjecture est fausse : $P(Y = 15) \approx 0,000157 > 0$.

Partie C - Qualité de l'embouteillement

Question 1. **À partir du tableau des volumes mesurés et de leurs effectifs, déterminer à la calculatrice la moyenne $\bar{x}$ et l'écart type σ de l'échantillon de 100 bouteilles. Arrondir l'écart type à 10^{-2}.**

Volume (cL)	73	74	75	76	77
Effectif	17	20	43	13	7

La moyenne pondérée vaut $\bar{x} = (73 \times 17 + 74 \times 20 + 75 \times 43 + 76 \times 13 + 77 \times 7)/100 = 74,73$ cL. Le second moment vaut $558579/100$, donc l'écart type calculé avec les 100 valeurs est $\sqrt{558579/100 - 74,73^2} \approx 1,103$ cL, soit 1,10 cL au centième.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$\bar{x} = 74,73$ cL ; $\sigma \approx 1,10$ cL.

Question 2.a. Sous l'hypothèse H₀ : m = 75, déterminer un réel h tel que P(75 - h ≤ Z ≤ 75 + h) soit approximativement égale à 0,95, à 10^{-2} près, en utilisant l'écart type estimé de 0,11.

Sous l'hypothèse H_0, la variable Z suit une loi normale d'espérance 75 et d'écart type 0,11. L'intervalle central de 95 % correspond à environ 1,96 écart type de part et d'autre de la moyenne. Ainsi, $h = 1,96 \times 0,11 = 0,2156$ cL, soit 0,22 cL à 10^{-2} près.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$h \approx 0,22$ cL.

Question 2.b. Énoncer la règle de décision du test bilatéral au seuil de confiance de 95 % portant sur H₀ : m = 75 et H₁ : m ≠ 75.

Au seuil de 5 %, on compare la moyenne de l'échantillon à l'intervalle central de 95 % sous H_0. Avec $h \approx 0,22$, cet intervalle est $[75 - 0,22\,;\ 75 + 0,22] = [74,78\,;\ 75,22]$. Si la moyenne observée appartient à cet intervalle, on ne rejette pas H_0 ; sinon, on rejette H_0 au profit de H_1.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Ne pas rejeter H_0 si $\bar{x} \in [74,78\,;\ 75,22]$; la rejeter sinon.

Question 2.c. À partir des résultats de l'échantillon fourni, indiquer si l'hypothèse H₀ : m = 75 peut être acceptée.

La moyenne observée est $\bar{x} = 74,73$ cL. Elle est inférieure à la borne basse 74,78 cL de l'intervalle de décision obtenu à la question précédente. Elle n'appartient donc pas à l'intervalle central de 95 % sous H_0 : le test conduit à rejeter l'hypothèse d'un réglage correct au seuil de 5 %.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Non : H_0 est rejetée au seuil de 5 %.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2022)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement D1, session 2022, code 22-MATGRD1, d'une durée de 2 heures ; le coefficient varie selon la spécialité, de 1 à 2. Les deux exercices étudient la modélisation de l'équipement d'un implant médical, puis les probabilités de défaut et de panne et le contrôle statistique du volume d'eau d'une machine à embouteiller. Les compétences évaluées couvrent calcul, interprétation et décision statistique.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Le changement de variable y = ln(N - 30) transforme le modèle de la partie A en un ajustement affine de y en fonction du rang k.
- La solution de y' + ay = b s'obtient en ajoutant une solution particulière constante à la solution générale de l'équation homogène.
- Le nombre de pannes sur 200 jours indépendants suit une loi binomiale B(200 ; 0,025), approchée par une loi de Poisson de paramètre λ = np = 5.
- Pour le test bilatéral à 95 %, la zone d'acceptation de H_0 est centrée sur 75 et délimitée par l'intervalle de probabilité 0,95.

Points de vigilance & attentes du jury

- Garder à l'esprit que les nombres de personnes sont exprimés en milliers dans les modèles de l'exercice 1.
- Distinguer le rang k depuis 2013 du temps t, lui aussi mesuré en années depuis 2013, dans le modèle de la partie B.
- Pour la loi binomiale, vérifier les 200 jours, la probabilité de panne 0,025 et l'indépendance des jours.
- Pour le test, comparer la moyenne observée à la zone d'acceptation, puis conclure explicitement au seuil annoncé.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment retrouver le modèle exponentiel à partir du changement de variable ?

On pose y = ln(N - 30), puis on ajuste y en fonction du rang k par une droite y = ak + b. En revenant à N, on obtient N = 30 + e^(ak+b), ce qui donne le modèle exponentiel.

Q : Pourquoi peut-on approcher la loi binomiale par une loi de Poisson dans cet exercice ?

Le nombre de pannes suit une loi binomiale de paramètres n = 200 et p = 0,025. L'approximation de Poisson utilise λ = np = 5, comme l'indique le sujet pour cette approximation.

Q : Comment répartir le temps pendant cette épreuve de deux heures ?

Le sujet comporte deux exercices de 10 points chacun. Répartissez le temps entre les deux, en gardant une marge pour effectuer les calculs, vérifier les arrondis et rédiger les justifications ainsi que les conclusions.

Q : Que faut-il écrire pour conclure le test statistique ?

Il faut appliquer la règle de décision à la moyenne observée, puis indiquer si l'on accepte ou rejette H_0 au seuil de confiance de 95 %. La conclusion doit préciser ce que cela implique pour le réglage de la machine.

Sujet officiel associé (PDF) : https://bts2m.fr/assets/annales/bts-2m/E2 - Mathématiques/2022/BTS 2M - E2 - Mathématiques - Session 2022 - 3-Sujet.pdf
Ressources BTS Métiers de la Mesure : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.