Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV®.

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
formav.co/explorer

BTS MÉTIERS DE LA MESURE • CORRIGÉ DÉTAILLÉ

Mathématiques - Groupement B des BTS

Session 2023 • Code sujet : **23MATGRB2** • Durée : **2 heures** • Coefficient : **1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques ; 2 en Électrotechnique**

Sommaire

Cliquez sur une partie pour y accéder directement

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction (12 questions) **Page 3**

2. Séries de Fourier d’une fonction périodique paire (10 questions) **Page 7**

3. Ce qu’il faut retenir & Questions fréquentes (FAQ) (Synthèse & Q&A Examen) **Page 13**

Sujet officiel (PDF) : https://bts2m.fr/assets/annales/bts-2m/E2 - Mathématiques/2023/BTS 2M - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

1. Fermeture d’un tiroir : équation différentielle et étude de fonction

La distance entre le fond du tiroir et celui du meuble est modélisée par une fonction du temps, exprimée en centimètres. L’exercice étudie cette fonction au moyen d’une équation différentielle, de ses variations, d’un algorithme de seuil et du calcul de la position moyenne.

Partie A

Question 1.a. Résoudre l’équation caractéristique r² + 5r + 4 = 0.

Pour résoudre l’équation caractéristique, on calcule d’abord son discriminant : $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 9$. Il est positif, donc l’équation admet deux racines réelles distinctes. La formule quadratique donne $r = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{2}$. On obtient ainsi les deux valeurs demandées, que l’on peut aussi vérifier en factorisant le trinôme sous la forme $(r+1)(r+4)$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les deux racines réelles distinctes de l’équation caractéristique sont $r_1 = -1$ et $r_2 = -4$.

Question 1.b. À l’aide des solutions de l’équation caractéristique et du tableau fourni, résoudre l’équation différentielle y'' + 5y' + 4y = 0.

Les racines de l’équation caractéristique sont -1 et -4, elles sont réelles et distinctes. D’après le tableau fourni, la solution générale de l’équation différentielle homogène est une combinaison linéaire des exponentielles associées à ces racines. Les constantes sont arbitraires à cette étape. Si l’on impose ensuite les conditions initiales de la question 2, on pourra déterminer leurs valeurs.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> La solution générale est $y(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t}$, où C_1 et C_2 sont des constantes réelles arbitraires.

Question 2.a. À partir des conditions initiales indiquant que le point M se trouve à 20 cm de O et se déplace à la vitesse de −10 cm·s⁻¹, déterminer f(0) et f'(0).

La fonction f représente la distance entre O et M, mesurée en centimètres. À l’instant initial, cette distance vaut donc 20 cm, ce qui donne la valeur de $f(0)$. La dérivée $f'(0)$ représente la vitesse instantanée, exprimée en cm·s⁻¹. Le mouvement vers O est explicitement donné comme une vitesse négative de -10 cm·s⁻¹.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Les conditions initiales sont $f(0) = 20$ cm et $f'(0) = -10$ cm·s⁻¹.

Question 2.b. **En admettant que f(t) = (70/3)e⁻ᵗ − (10/3)e⁻⁴ᵗ, déterminer la valeur exacte de la distance OM deux secondes après le début de la fermeture.**

On remplace t par 2 dans l'expression admise :

$$f(2) = \frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-4\times 2}.$$

Cette valeur est la distance entre O et M au bout de deux secondes. Elle est exprimée en centimètres. L'expression exacte demandée est conservée, puis son évaluation donne environ 3,157 cm.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Après deux secondes, la distance exacte vaut $\frac{70}{3}e^{-2} - \frac{10}{3}e^{-8}$ cm, soit environ 3,157 cm.

Question 2.c. **Le tiroir est dit fermé lorsque la distance OM est inférieure à 0,5 cm. Vérifier, en justifiant, si le constructeur a raison d'affirmer que le tiroir est fermé en moins de 4 secondes.**

Avec l'expression de f, on obtient $f(4) = \frac{70}{3}e^{-4} - \frac{10}{3}e^{-16} \approx 0{,}427$ cm. La fonction est strictement décroissante, car $f'(t) = \frac{e^{-4t}}{3}(40 - 70e^{3t}) < 0$ pour tout $t \geq 0$. Comme $f(4) < 0{,}5$ cm, le seuil a donc été franchi avant 4 secondes.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> Oui, le constructeur a raison : la distance est déjà inférieure à 0,5 cm à 4 secondes, donc le seuil est franchi avant.

Partie B

Question 1.a. **En utilisant la limite rappelée pour e⁻ᵘ lorsque u tend vers +∞, déterminer la limite de f(t) lorsque t tend vers +∞.**

La fonction est $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$. Lorsque t tend vers $+\infty$, les quantités t et $4t$ tendent vers $+\infty$. Ainsi, les exponentielles e^{-t} et e^{-4t} tendent toutes deux vers zéro. Chaque terme de la différence tend donc vers zéro, et la limite de $f(t)$ est nulle.

> ✓ **RÉPONSE À RETENIR**
>
> La limite de $f(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$ est 0.

Question 1.b. **Déduire de la limite précédente que la courbe représentative de f possède une asymptote, et en donner une équation.**

La limite de $f(t)$ en $+\infty$ est finie et vaut zéro. Par définition, lorsque la limite d'une fonction en l'infini vaut L, sa courbe admet une asymptote horizontale d'équation $y = L$. Ici, on prend $L = 0$. L'asymptote de la courbe représentative est donc l'axe des abscisses.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La courbe $\mathcal{C}$ admet en $+\infty$ l'asymptote horizontale d'équation $y = 0$, qui est l'axe des abscisses.

Question 2.a. Déterminer l'expression de f'(t) pour tout t appartenant à [0 ; +∞[.

On dérive chaque terme de $f(t) = \frac{70}{3}e^{-t} - \frac{10}{3}e^{-4t}$ avec la règle de dérivation d'une exponentielle composée. On a $(e^{-t})' = -e^{-t}$ et $(e^{-4t})' = -4e^{-4t}$. Le coefficient négatif du second terme transforme donc sa dérivée en terme positif.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Pour tout $t \in [0;+\infty[$, $f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$.

Question 2.b. Sachant que f'(t) < 0 sur [0 ; +∞[, établir le tableau de variations de f sur cet intervalle.

Comme $f'(t) < 0$ sur l'intervalle considéré, f y est strictement décroissante. À l'origine, $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$, et sa limite en $+\infty$ vaut zéro. Le tableau résume le signe de la dérivée ainsi que les valeurs aux bornes et le sens de variation.

t	0		$+\infty$
Signe de $f'(t)$		$-$	
Variation de f	20	$\searrow$	0

✓ RÉPONSE À RETENIR

Sur $[0;+\infty[$, la fonction f est strictement décroissante de 20 vers 0.

Question 3.a. Compléter le tableau de l'algorithme à partir de la ligne 36, en indiquant f(t) arrondie au centième et si la condition de boucle est vraie ou fausse, jusqu'à l'arrêt de l'algorithme.

À chaque passage dans la boucle, t augmente de 0,1 seconde. On calcule ensuite $f(t)$ au centième et on teste la valeur non arrondie par rapport à 0,5. La condition est vraie aux lignes 36, 37 et 38, puis devient fausse à la ligne 39. Cette dernière ligne est donc celle où l'algorithme s'arrête.

Ligne	t	$f(t)$**, au centième**	**Condition** $f(t) > 0{,}5$
36	3,6	0,64	VRAIE
37	3,7	0,58	VRAIE
38	3,8	0,52	VRAIE
39	3,9	0,47	FAUSSE

✓ RÉPONSE À RETENIR

L'algorithme s'arrête à la ligne 39 : $t = 3{,}9$ s et $f(t)$ arrondie au centième vaut 0,47 cm.

Question 3.b. Donner la valeur de la variable t à la fin de l'exécution de l'algorithme et interpréter le résultat dans le contexte de la fermeture du tiroir.

L'algorithme conserve la valeur de t à laquelle la condition devient fausse. Elle reste vraie à $3{,}8$ s, puis, après l'incrément de $0{,}1$ s, le test effectué à $3{,}9$ s est faux puisque $f(3{,}9) < 0{,}5$. La variable t vaut alors 3,9. Le tiroir est donc fermé à cet instant.

✓ RÉPONSE À RETENIR

À la fin de l'algorithme, $t = 3{,}9$ s : le tiroir est fermé en moins de 4 secondes.

Question 4. La position moyenne du tiroir est définie par m = (1/4)∫₀⁴ f(t)dt. Démontrer que m = 45/8 − (35/6)e⁻⁴ + (5/24)e⁻¹⁶.

On primitive chaque terme de f, puis on évalue entre 0 et 4 :

$$m = \frac{1}{4}\left[-\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{5}{6}e^{-4t}\right]_0^4.$$

Ainsi,

$$m = \frac{1}{4}\left(\frac{70}{3}(1 - e^{-4}) - \frac{5}{6}(1 - e^{-16})\right).$$

En développant et en réduisant les constantes, on retrouve l'expression demandée pour la position moyenne.

✓ RÉPONSE À RETENIR

La position moyenne sur les quatre premières secondes vaut $m = \frac{45}{8} - \frac{35}{6}e^{-4} + \frac{5}{24}e^{-16}$ cm.

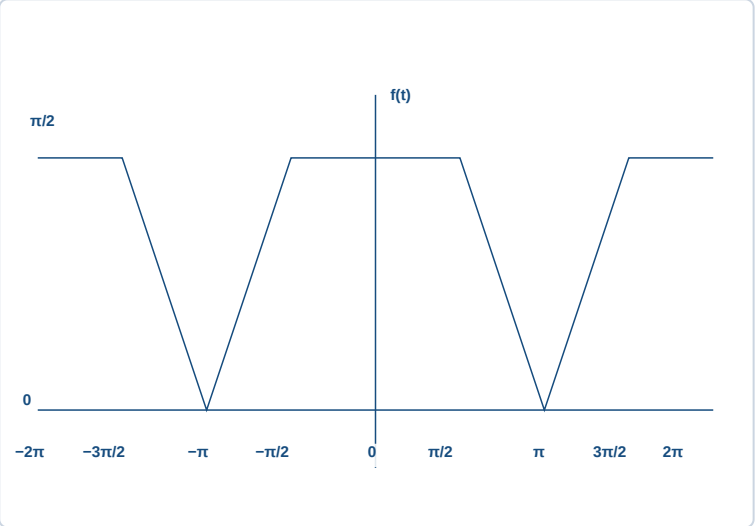
2. Séries de Fourier d’une fonction périodique paire

L’exercice porte sur une fonction paire, périodique de période 2π, définie par morceaux sur une demi-période. Il demande d’étudier son graphe et ses coefficients de Fourier, puis d’utiliser une somme partielle pour comparer une approximation de sa valeur efficace.

Question 1. Sur le document-réponse, tracer la représentation graphique de la fonction f sur l’intervalle [−2π ; 2π], en tenant compte de sa définition par morceaux et de sa périodicité.

Sur chaque période, la courbe est constante à
$pi/2$ sur un intervalle de longueur
$pi/2$, puis décroît linéairement jusqu’à 0. La parité donne le tracé symétrique à gauche de 0 ; la périodicité répète ce motif tous les 2
pi. Le dessin indique les points remarquables sur $[-2$
$pi; 2$
$pi]$.

Graphe de f sur [-2π ; 2π]



✓ RÉPONSE À RETENIR

Tracé : plateaux à
$pi/2$, minima nuls en $-$
pi et
pi, motif de période 2
pi.

Question 2. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le coefficient de Fourier b_n est nul.

La fonction étant paire et périodique, le coefficient peut s’écrire $b_n =$
$frac1$
pi
$int_0^{2pi} f(t)$
$sin(nt)$
$, dt$. Posons $u = 2$

$pi - t$: alors $f(2$
$pi - u) = f(u)$, tandis que
$sin(n(2$
$pi - u)) = -$
$sin(nu)$.

L'intégrale est donc égale à son opposée, ce qui donne $b_n = 0$ pour tout entier n
$geq 1$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> Pour tout entier n
> $geq 1$, $b_n = 0$.

Question 3. **Déterminer la pulsation ω associée à la fonction f, sachant que sa période est T = 2π.**

La relation entre période et pulsation est
$omega =$
$frac 2 pi T$. Avec $T = 2$
pi, on obtient
$omega =$
$frac 2 pi 2 pi = 1$. Les termes trigonométriques de Fourier sont donc
$cos(nt)$ et
$sin(nt)$.

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $omega = 1$ radian par unité de temps.

Question 4. **Démontrer que le coefficient de Fourier a_0 est égal à 3π/8.**

Intervalle	Aire sous la courbe
$[0;$ $pi/2]$	$pi^2/4$
$[$ $pi/2;$ $pi]$	$pi^2/8$

Par parité et périodicité, l'intégrale sur $[0; 2$
$pi]$ vaut deux fois l'aire du tableau, soit 3
$pi^2/4$. Ainsi, $a_0 =$
$frac 1 2 pi$
$int_0^{2pi} f(t)$
$, dt =$
$frac 3 pi 8$.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_0 =$
$frac3pi8.$

Question 5. Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, aₙ = ∫₀^(π/2) cos(nt)dt + (2/π)∫_(π/2)^π (π − t)cos(nt)dt.

Le formulaire donne, puisque f est paire, $a_n =$
$frac4T$
$int_0^{T/2} f(t)$
$cos(n$
$omegat)$
$, dt.$ En utilisant $T = 2$
pi et
$omega = 1$, puis en séparant l'intégrale au point
$pi/2$, où l'expression de f change, on obtient :

$a_n =$
$frac2pi$
$left[$
$int_0^{pi/2}$
$fracpi2$
$cos(nt)$
$, dt +$
$int_{pi/2}^{pi}($
$pi - t)$
$cos(nt)$
$, dt$
$right]$, soit l'égalité demandée.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$a_n =$
$int_0^{pi/2}$
$cos(nt)$
$, dt +$
$frac2pi$
$int_{pi/2}^{pi}($
$pi - t)$
$cos(nt)$
$, dt.$

Question 6. **En admettant que $a_n = 2/(\pi n^2)(\cos(n\pi/2) - \cos(n\pi))$, déterminer les valeurs exactes de a_1, a_2 et a_3.**

On remplace successivement n par 1, 2 et 3 dans la formule admise :

- $a_1 = frac2pi(0 - (-1)) = frac2pi$;
- $a_2 = frac24pi(-1 - 1) = - frac1pi$;
- $a_3 = frac29pi(0 - (-1)) = frac29pi.$

> **✓ RÉPONSE À RETENIR**
>
> $a_1 = frac2pi, quada_2 = - frac1pi, quada_3 = frac29pi.$

Question 7. **Déduire des coefficients obtenus que $s_3(t) = 3\pi/8 + (2/\pi)\cos(t) - (1/\pi)\cos(2t) + (2/(9\pi))\cos(3t)$.**

La somme partielle d'ordre 3 s'écrit $s_3(t) = a_0 + sum_{n=1}^3(a_n cos(nt) + b_n sin(nt))$. En y substituant $a_0 = 3 pi/8$, les trois coefficients précédents et $b_n = 0$, on obtient l'expression demandée :

$$s_3(t) = frac3pi8 + frac2pi cos(t) - frac1pi cos(2t) + frac29pi cos(3t).$$

✓ RÉPONSE À RETENIR

$s_3(t) =$
$frac3pi8 +$
$frac2pi$
$cos(t) -$
$frac1pi$
$cos(2t) +$
$frac29pi$
$cos(3t).$

Question 8. **Indiquer, sans justification, laquelle des trois courbes proposées est associée à la fonction s_3.**

La courbe associée à s_3 est la courbe numéro 3.

✓ RÉPONSE À RETENIR

Courbe numéro 3.

Question 9.a. **Pour $P = (a_0)^2 + ½[(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2]$, donner une valeur approchée de P à 10^{-4} près.**

Avec les coefficients déterminés, $P = (3$
$pi/8)^2 +$
$frac12[(2/$
$pi)^2 + (-1/$
$pi)^2 + (2/(9$
$pi))^2]$. Après réduction, $P =$
$frac9pi^264 +$
$frac409162pi^2$. L'arrondi au 10^{-4} près donne :

P
$approx1{,}6437.$

✓ RÉPONSE À RETENIR

P
$approx1{,}6437.$

Question 9.b. **On admet que $F^2 = \pi^2/6$ et que P constitue une approximation de F^2, où F est la valeur efficace de f. Choisir, parmi 0,1 %, 1 % et 10 %, le pourcentage d'erreur de cette approximation. Une seule réponse est attendue, sans justification.**

L'erreur relative vaut
$frac|F^2 - P|F^2$
$times100$. Avec $F^2 =$

$pi^2/6$ et P
$approx 1{,}6437$, elle est d'environ $0{,}074$
. Parmi les trois choix proposés, la réponse correspondante est $0{,}1$
.

✓ RÉPONSE À RETENIR

$0{,}1$
.

Ce qu'il faut retenir de ce sujet (Session 2023)

Bilan de l'épreuve : Épreuve de mathématiques du BTS, Groupement B, session 2023, code 23MATGRB2, d'une durée de deux heures, coefficient 1,5 en Conception et industrialisation en microtechniques et 2 en Électrotechnique. Deux exercices de 10 points portent sur la fermeture d'un tiroir, modélisée par une équation différentielle et une fonction, puis sur les séries de Fourier d'une fonction périodique paire. Le sujet évalue calcul, raisonnement, représentation et interprétation.

Notions-clés, formules & règles à maîtriser

- Pour $y'' + 5y' + 4y = 0$, les racines de $r^2 + 5r + 4 = 0$ déterminent les exponentielles de la solution générale.
- Le signe de f' permet d'établir les variations d'une fonction ; sa limite à l'infini renseigne sur une éventuelle asymptote horizontale.
- Pour une fonction paire, les coefficients sinus b_n sont nuls et les coefficients cosinus se calculent sur une demi-période.
- La pulsation et la période sont liées par $\omega = 2\pi/T$; une somme partielle de Fourier conserve les termes jusqu'au rang choisi.

Points de vigilance & attentes du jury

- Distinguer f(0), qui représente la distance initiale, de f'(0), qui représente la vitesse et peut être négative.
- Dans l'algorithme, évaluer la condition avec la valeur courante de t avant de décider si la boucle continue.
- Pour les coefficients de Fourier, respecter les bornes d'intégration et les facteurs du formulaire.
- Pour le pourcentage d'erreur, comparer l'écart entre P et la valeur de référence F^2 à cette valeur de référence.

Questions fréquentes sur cette épreuve (Q&A Examen)

Q : Comment utiliser les conditions initiales pour déterminer les constantes de la solution différentielle ?

Écrivez la solution générale puis sa dérivée. Remplacez t par 0 dans ces deux expressions et égalez-les aux valeurs de f(0) et f'(0). Le système obtenu permet de déterminer les constantes.

Q : Pourquoi les coefficients sinus de Fourier sont-ils nuls dans cet exercice ?

La fonction f est paire, tandis que sin(nt) est impaire. Leur produit est donc impair et son intégrale sur un intervalle symétrique est nulle. Cela entraîne $b_n = 0$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Q : Comment savoir à quel moment arrêter le tableau de l'algorithme ?

À chaque étape, évaluez la condition avec la valeur courante de t. La boucle continue tant que f(t) est strictement supérieure à 0,5 ; elle s'arrête dès que cette condition devient fausse.

Q : Quels éléments faut-il respecter pour la notation et les résultats dans ce sujet ?

Chaque exercice vaut 10 points, mais le sujet ne détaille pas la répartition par question. Présentez les étapes de calcul et les justifications demandées, respectez les unités et l'arrondi spécifié, et répondez sans justification aux questions qui le précisent.

Sujet officiel associé (PDF) : https://bts2m.fr/assets/annales/bts-2m/E2 - Mathématiques/2023/BTS 2M - E2 - Mathématiques - Session 2023 - 2-Sujet.pdf

Ressources BTS Métiers de la Mesure : Toutes les annales & corrigés • Fiches de révision complètes • Simulateur de notes d'examen

Copyright © 2027 FormaV®. Tous droits réservés.

FormaV® est une marque déposée auprès de l'INPI sous le numéro 5227897.

Ce document a été élaboré par FormaV® avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV®, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV® se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.