Ce document a été mis en ligne par l'organisme FormaV©

Toute reproduction, représentation ou diffusion, même partielle, sans autorisation préalable, est strictement interdite.

Pour en savoir plus sur nos formations disponibles, veuillez visiter :
www.formav.co/explorer

BTS Électrotechnique – Session 2025

Épreuve de Mathématiques – Groupement B

- **Code sujet :** 25MATGRB3
- **Durée :** 2 heures
- **Calculatrice autorisée :** Oui (mode examen actif ou « type collège » sans mémoire)

EXERCICE 1 (10 points)

Résumé de l'énoncé

On étudie le refroidissement d'une plaque d'aluminium. La température f(t) (en °C) à l'instant t (en minutes) est modélisée par une équation différentielle et une fonction exponentielle. L'exercice comporte deux parties indépendantes : résolution d'équation différentielle (Partie A) et étude de la fonction (Partie B).

PARTIE A – Équation différentielle

1. Résolution de l'équation différentielle homogène

On cherche les solutions de y' + 0,25y = 0.

- Il s'agit d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.
- D'après la formule fournie :

> *y' + a y = 0 a pour solutions y(t) = k e^{-a t} où k ∈ ℝ.*

- Ici, a = 0,25, donc : y(t) = k e^{-0,25 t}

Les solutions de y' + 0,25y = 0 sont : y(t) = k e^{-0,25 t} avec k ∈ ℝ.

Point de méthode : Pour une équation différentielle du type y' + a y = 0, la solution générale est toujours une exponentielle décroissante si a > 0.
Erreur fréquente : Oublier le signe moins dans l'exposant ou confondre le coefficient de t.

2. Recherche d'une solution constante de l'équation complète

On cherche g(t) = c solution de y' + 0,25y = 7,5.

- La dérivée de g est nulle : g'(t) = 0.
- On remplace dans l'équation : 0 + 0,25c = 7,5 donc c = 7,5 / 0,25 = 30.

La solution constante est g(t) = 30.

Point de méthode : Pour une équation différentielle avec second membre constant, une solution particulière constante s'obtient en posant la dérivée nulle.
Erreur fréquente : Oublier de diviser par le coefficient de y.

3. Ensemble des solutions de l'équation complète

L’équation complète est y' + 0,25y = 7,5.

- La solution générale est la somme d’une solution de l’homogène et d’une solution particulière :
- y(t) = k e^{-0,25 t} + 30, k ∈ ℝ

Toutes les solutions sont y(t) = k e^{-0,25 t} + 30, avec k ∈ ℝ.

Point de méthode : Solution générale = solution homogène + solution particulière.
Erreur fréquente : Oublier d’ajouter la solution particulière.

4. Détermination de la fonction f connaissant f(0) = 250

On cherche k tel que f(0) = k e^{0} + 30 = 250.
Donc k + 30 = 250 ⇒ k = 220.

f(t) = 220 e^{-0,25 t} + 30

Point de méthode : Utiliser la condition initiale pour déterminer la constante d’intégration.
Erreur fréquente : Oublier d’appliquer la condition initiale ou mal calculer k.

PARTIE B – Étude de la fonction

On considère f(t) = 220 e^{-0,25 t} + 30 pour t ≥ 0.

1. Température après un quart d’heure (15 minutes)

On calcule f(15) = 220 e^{-0,25 × 15} + 30.

- 0,25 × 15 = 3,75
- e^{-3,75} ≈ 0,0235 (à la calculatrice)
- 220 × 0,0235 ≈ 5,17
- f(15) ≈ 5,17 + 30 = 35,2 (arrondi à 0,1°C)

Après 15 minutes, la température est 35,2 °C (arrondi à 0,1°C).

Point de méthode : Attention à bien utiliser la calculatrice pour l’exponentielle négative.
Erreur fréquente : Oublier d’ajouter 30 ou mal arrondir.

2. Limite de f en +∞ et interprétation

- $\lim_{t\to+\infty}$ e^{-0,25 t} = 0
- Donc $\lim_{t\to+\infty}$ f(t) = 0 + 30 = 30

Conséquence pour la courbe : la courbe admet une asymptote horizontale d’équation y = 30.

Interprétation : La température de la plaque tend vers 30°C lorsque le temps de refroidissement devient très grand. Cela correspond à la température ambiante.

$\lim_{t\to+\infty}$ f(t) = 30.
La courbe admet une asymptote horizontale y = 30.

Interprétation : la plaque finit par atteindre la température ambiante.

Point de méthode : La limite d'une exponentielle négative en +∞ est toujours 0.
Erreur fréquente : Dire que la température devient nulle (au lieu de tendre vers 30).

3. Dérivée et variations de f

On dérive f(t) = 220 e^{-0,25 t} + 30 :

- f'(t) = 220 × (-0,25) e^{-0,25 t} + 0 = -55 e^{-0,25 t}
- Pour tout t ≥ 0, e^{-0,25 t} > 0, donc f'(t) < 0.
- f est strictement décroissante sur [0 ; +∞[.

Interprétation : la température de la plaque diminue continuellement au cours du temps.

f'(t) = -55 e^{-0,25 t}.
f est strictement décroissante sur [0 ; +∞[.

Point de méthode : Dériver une fonction de la forme A e^{kt} donne A k e^{kt}.
Erreur fréquente : Oublier le signe négatif ou la dérivée de l'exposant.

4. Vérification de l'affirmation du technicien et calcul du temps pour passer sous 150°C

- En cent secondes : 100 s = 1 min 40 s = 1,666... min
- Calculons la température après 1,67 min :
  - f(1,67) = 220 e^{-0,25 × 1,67} + 30
  - 0,25 × 1,67 ≈ 0,4175
  - e^{-0,4175} ≈ 0,6588
  - 220 × 0,6588 ≈ 144,94
  - f(1,67) ≈ 144,94 + 30 = 174,94
- La température n'a donc pas baissé de 100°C (elle passe de 250°C à ≈ 175°C, soit une perte de 75°C environ).
- Durée pour passer sous 150°C :
  - On cherche t tel que f(t) < 150
  - 220 e^{-0,25 t} + 30 < 150
  - 220 e^{-0,25 t} < 120 ⇒ e^{-0,25 t} < 120 / 220 = 0,5455
  - -0,25 t < ln(0,5455) ⇒ -0,25 t < -0,606
  - t > 0,606 / 0,25 = 2,424 min
  - 2,424 min = 2 min 25,4 s ≈ 145 s (arrondi à la seconde)

- **L'affirmation du technicien est fausse : en 100 s, la plaque ne perd pas 100°C.**
- **La durée nécessaire pour passer sous 150°C est 145 secondes (arrondi à la seconde).**

Point de méthode : Pour résoudre une inéquation de la forme A e^{kt} + B < C, isoler l'exponentielle puis prendre le logarithme.
Erreur fréquente : Oublier de convertir les minutes en secondes ou se tromper dans le sens de l'inégalité après le logarithme.

5. Croquis de la courbe représentative de f

Le croquis doit montrer :

- Une courbe strictement décroissante partant de f(0) = 250 (ordonnée à l'origine)
- Asymptote horizontale y = 30
- Point (15 ; 35,2) (température après 15 min)
- Abscisse t ≈ 2,4 min où la courbe passe sous 150°C

À réaliser à la main sur la copie, en soignant l'échelle et en plaçant les points remarquables.

Point de méthode : Toujours indiquer les axes, l'asymptote, et les points calculés dans les questions précédentes.
Erreur fréquente : Oublier de placer l'asymptote ou de respecter la décroissance de la courbe.

EXERCICE 2 (10 points)

Résumé de l'énoncé

On étudie un signal périodique u(t) de période π, défini par u(t) = t sur [0 ; π[. On demande des valeurs, un croquis, l'étude de la valeur moyenne, la fréquence, la pulsation, et le calcul de coefficients de Fourier et d'amplitudes.

1. Calcul de quelques valeurs de u

- u(1) = 1 (car 1 ∈ [0 ; π[)
- u(π) = u(0) = 0 (car u est périodique de période π)
- u(π + 1) = u(1) = 1 (car π + 1 - π = 1)
- u(4) : π ≈ 3,14, donc 4 = π + 0,86, donc u(4) = u(0,86) = 0,86

- **u(1) = 1**
- **u(π) = 0**
- **u(π + 1) = 1**
- **u(4) ≈ 0,86**

Point de méthode : Pour une fonction périodique de période π, u(t) = u(t - kπ) où k est l'entier tel que t - kπ ∈ [0 ; π[.
Erreur fréquente : Oublier la périodicité ou mal calculer le reste.

2. Croquis du signal u(t)

Sur chaque intervalle [kπ ; (k+1)π[, u(t) est une droite de pente 1 démarrant à 0 et montant jusqu'à π (non inclus), puis repart à 0. Sur trois périodes, le signal est une suite de « dents de scie ».

Point de méthode : Pour un signal en « rampe » périodique, bien montrer la discontinuité à chaque multiple de π.
Erreur fréquente : Tracer une droite continue au lieu d'un signal périodique.

3. Signal alternatif ?

Un signal est alternatif si sa valeur moyenne sur une période est nulle.

- $a_0 = (1/\pi) \int_0^{\pi} t\,dt = (1/\pi) \times [t^2/2]_0^{\pi} = (1/\pi) \times (\pi^2/2) = \pi/2$
- La valeur moyenne est $\pi/2 \neq 0$

u(t) n'est pas un signal alternatif car sa valeur moyenne est π/2 et non nulle.

Point de méthode : La valeur moyenne sur une période se calcule par $(1/T) \int_0^T u(t)\,dt$.
Erreur fréquente : Croire que tout signal périodique est alternatif.

4. Fréquence et pulsation

- Période $T = \pi$
- Fréquence $f = 1/T = 1/\pi \approx 0{,}318$ Hz
- Pulsation $\omega = 2\pi/T = 2$ rad/s

$f = 1/\pi \approx 0{,}318$ Hz ; $\omega = 2$ rad/s

Point de méthode : $f = 1/T$; $\omega = 2\pi/T$.
Erreur fréquente : Inverser T et f, ou oublier le facteur 2 dans la pulsation.

5. Calcul des coefficients de Fourier b_n

On admet que $\int_0^{\pi} t \sin(2n\,t)\,dt = -\pi/(2n)$.

- D'après le formulaire : $b_n = (2/\pi) \int_0^{\pi} t \sin(2n\,t)\,dt = (2/\pi) \times (-\pi/(2n)) = -1/n$

Pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = -1/n$.

Point de méthode : Bien utiliser le coefficient $2/\pi$ devant l'intégrale.
Erreur fréquente : Oublier le signe ou le facteur n au dénominateur.

6. Calcul des amplitudes A_n et tableau

On a $A_0 = |a_0| = \pi/2$ et pour $n \geq 1$, $A_n = |b_n| = 1/n$ (car $a_n = 0$).

n	0	1	2	3	4
Valeur exacte de A_n	$\pi/2$	1	1/2	1/3	1/4
Valeur approchée à 10^{-2} près	1,57	1,00	0,50	0,33	0,25

- $A_0 = \pi/2 \approx 1{,}57$
- $A_1 = 1$
- $A_2 = 0{,}5$
- $A_3 \approx 0{,}33$
- $A_4 = 0{,}25$

Point de méthode : Pour un coefficient nul, l'amplitude est simplement la valeur absolue de l'autre

coefficient.
Erreur fréquente : Oublier d'arrondir à 10^{-2} près.

7. Analyse des spectres

A_n est décroissant en fonction de n et non nul pour n ≥ 1.

- 7.a. Spectre 2 : Si le spectre présente des amplitudes nulles pour certains n ≥ 1, ce n'est pas possible ici car A_n ≠ 0 pour tout n ≥ 1.
- 7.b. Spectre 3 : Si le spectre présente des amplitudes croissantes ou non monotones, ce n'est pas possible car A_n doit décroître en 1/n.

- **Spectre 2 ne peut pas être celui de u(t) car il présente des amplitudes nulles pour certains n ≥ 1, ce qui n'est pas le cas ici.**
- **Spectre 3 ne peut pas être celui de u(t) car les amplitudes ne décroissent pas régulièrement comme 1/n.**

Point de méthode : Pour un spectre de type 1/n, les amplitudes décroissent et aucune n'est nulle pour n ≥ 1.
Erreur fréquente : Ne pas relier la forme du spectre à la décroissance des amplitudes.

Formulaire récapitulatif

- y' + a y = 0 → y(t) = k e^{-a t}
- Solution générale d'une équation différentielle linéaire du premier ordre non homogène : y(t) = k e^{-a t} + \text{(solution particulière)}
- Dérivée de A e^{kt} : A k e^{kt}
- Limite : lim_{t→+∞} e^{-a t} = 0
- Fréquence : f = 1/T ; Pulsation : ω = 2π/T
- Valeur moyenne sur une période : a_0 = (1/T) ∫_0^T f(t) dt
- Coefficients de Fourier :
  - a_n = (2/T) ∫_0^T f(t) cos(nωt) dt
  - b_n = (2/T) ∫_0^T f(t) sin(nωt) dt
- Amplitude : A_n = √(a_n^2 + b_n^2)

Conseils généraux pour réussir l'épreuve de mathématiques en BTS

1. **Lisez attentivement l'énoncé** : repérez les données, les questions et les unités. Soulignez les mots-clés.
2. **Soignez la rédaction** : chaque étape doit être justifiée, même les calculs simples. Expliquez vos raisonnements.
3. **Utilisez la calculatrice à bon escient** : vérifiez vos arrondis et gardez les valeurs exactes le plus longtemps possible.
4. **Vérifiez la cohérence des résultats** : une température négative ou une fréquence supérieure à 1 GHz sont souvent des erreurs de calcul ou d'unité.
5. **En cas de blocage, passez à la question suivante** : le barème est souvent indépendant, ne perdez pas de temps sur un point difficile.

© FormaV EI. Tous droits réservés.

Propriété exclusive de FormaV. Toute reproduction ou diffusion interdite sans autorisation.

Copyright © 2026 FormaV. Tous droits réservés.

Ce document a été élaboré par FormaV© avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV©, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV© se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.

Copyright © 2026 FormaV. Tous droits réservés.

Ce document a été élaboré par FormaV© avec le plus grand soin afin d'accompagner chaque apprenant vers la réussite de ses examens. Son contenu (textes, graphiques, méthodologies, tableaux, exercices, concepts, mises en forme) constitue une œuvre protégée par le droit d'auteur.

Toute copie, partage, reproduction, diffusion ou mise à disposition, même partielle, gratuite ou payante, est strictement interdite sans accord préalable et écrit de FormaV©, conformément aux articles L.111-1 et suivants du Code de la propriété intellectuelle. Dans une logique anti-plagiat, FormaV© se réserve le droit de vérifier toute utilisation illicite, y compris sur les plateformes en ligne ou sites tiers.

En utilisant ce document, vous vous engagez à respecter ces règles et à préserver l'intégrité du travail fourni. La consultation de ce document est strictement personnelle.

Merci de respecter le travail accompli afin de permettre la création continue de ressources pédagogiques fiables et accessibles.